STUDIE
ÜBER DIE DYNAMISCHE LINSE

INAUGURAL-DISSERTATION
der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Freiburg in der Schweiz
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HERMANN BRINER
aus Zürich

PAULUSDRUCKEREI • FREIBURG IN DER SCHWEIZ
1948

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538116_0034

STUDIE
ÜBER DIE DYNAMISCHE LINSE

INAUGURAL-DISSERTATION

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Freiburg in der Schweiz
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

HERMANN BRINER
aus Zürich

PAULUSDRUCKEREI • FREIBURG IN DER SCHWEIZ
1948

Auf Antrag der Herren Professoren F. DESSAUER und A. PFLUGER von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz angenommen.

Freiburg, den 4. Oktober 1948.

Der Dekan:

A. MÜLLER

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Sonderabdruck aus den Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg (Schweiz), Série Mathématiques et Physique, Bd. VI,

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung :

§ 1. Allgemeines 11
§ 2. Material 15
§ 3. Spezielle Ziele 15

II. Meßeinrichtung und Linsenfassungen :

§ 1. Wetthauer-Gerät 17
§ 2. Auferlegung der Randbedingungen 18
§ 3. Druckeinrichtung 20

Erster Teil

Die Schalen der dynamischen Linse

III. Einspannen :

§ 1. Vorkrümmung des Randes 23
§ 2. Schwingringe. 24
§ 3. Randdruck. 25

IV. Dichten :

§ 1. Reproduzierbarkeit — Kautschukdichtungen 28
§ 2. Bleidichtungen 31
§ 3. Gekittete Schalen. 32

V. Kombinierte Linsenschalen. Elastizität und Bruchfestigkeit :

§ 1. Überzogene Scheiben 33
§ 2. Geklebte Scheiben 33
§ 3. Elastizitätsmessung 34
§ 4. Elastizität der kombinierten Gläser 35
§ 5. Bruchfestigkeit 37
§ 6. Vorteilhafte Dicke 38
§ 7. Einfluß der Kombination auf die Durchbiegung. . . . 38
§ 8. Folgen für die Korrektur der Aberration 45
§ 9. Weiteres Mittel zur Erhöhung des Elastizitätsbereichs . 45

VI. Elastizität von Glas :

§ 1. Hysteresis und elastische Eigenschaften von Silikatglas. 46
§ 2. Elastizität und Überzug 47
§ 3. Hysteresis von Plexiglas und von Silikatglas 48

VII. Verkürzung der Brennweiten :

§ 1. Notwendigkeit einer Verkürzung der Brennweiten . . . 50
§ 2. Füllflüssigkeit 50
§ 3. Doppellinse 52

VIII. Krümmung und Aberration :

§ 1. Vorkrümmung 53
§ 2. Schwingringe 53
§ 3. Dicke der Glasscheiben 53
§ 4. Brennweite verschiedener Zonen 54
§ 5. Schalendicke und Schalenradius 55
§ 6. Pressung der Einspannringe 55
§ 7. Deformation durch Unregelmäßigkeit in der Dicke . . 56

Zweiter Teil

Die Korrektur des Zonenfehlers

Einleitung 58

IX. Korrektur der Einzelfläche :

§ 1. Veränderliche Dicke 59
§ 2. Veränderlicher Radius 61
§ 3. Geformte Scheiben 61

a) Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe nicht konstanter Dicke bei kleiner Durchbiegung . . 63
b) Randbedingungen und Lösungsmöglichkeiten 68
c) Integration für die Parabel zweiter Ordnung 70
d) Integration für die Parabel vierter Ordnung 71
e) Integration für Parabeln höheren Grades 71
f) Integration für einen Kreis 71
g) Diskussion 72
h) Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe bei großer Durchbiegung 73
i) Randbedingungen 80
k) Integration für eine Parabel zweiten Grades 81
l) Integration für einen Kreis 81
m) Integration für die Parabel vierter Ordnung 81
n) Parabeln höherer Ordnung 82
o) Diskussion 82

X. Korrektur mit mehreren Flächen :

§ 1. Sphärische Linsen 84
§ 2. Meniskus 84
§ 3. Verschiedene Füllflüssigkeiten 85
§ 4. Verschiedene Dicke der Linsenschalen. 86
§ 5. Linse mit Teilung der Füllkammer. 88
§ 6. Linse mit Gegendruck 88
§ 7. Doppellinse 93
§ 8. Berücksichtigung der Schalenkombination. 94

Zusammenfassung 95

BEZEICHNUNGEN

d = Dicke von Streifen und Platten (konstant).
h = Veränderliche Dicke, Funktion von r oder x.
e = Halbe Dicke = h/2 oder d/2.
d_1, d_2 = Dicken der beiden Schichten bei Kombination.
o = Querschnitt von Streifen und Platten.
b = Breite von Streifen und Platten.
l = Länge der Streifen.
r = Laufende Koordinate des Radius bei Scheiben.
x = Laufende Koordinate bei Scheiben und Streifen.
Ursprung der x-Koordinaten bei Streifen : linker Auflagepunkt, bei Scheiben : Mittelpunkt.
ρ = Krümmungsradius.
z = Durchbiegung (Funktion von r oder x) ($>$ o n. unten).
a = Öffnung der Linse, d. h. Radius des Auflageringes.
P = Einzellast (Bei Kombination auch Q)
p = Last (Druck) pro cm^2 (Bei Kombination auch q)
u = Biegungspfeil ($= z_{max}$).
E, E_1, E_2 = Elastizitätsmoduln von Gläsern.
E_o = Elastizitätsmodul des Überzuges.
m = Poissonsche Zahl (> 1).
G = Schubmodul.
J = (J_y) = Flächenträgheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Faser (y).
i = Dicke des Überzuges.
α = Neigungswinkel von $z = z(x)$.
ds = Länge der neutralen Faser im Schnitt der Länge dx.
M = Kraftmomente positiv in der Rechtsrichtung.
ε = Dehnung (Indizes r, t für Radial- und Tangentialrichtung).
σ = Normalspannung.
τ = Schubspannung.
ζ = Abstand der neutralen Faser von der Querschnittsmitte.
ω = Winkel mit Scheitel im Krümmungsmittelpunkt.
λ = Abstand von der neutralen Faser.
δ oder Δds = Verlängerung im Abstand λ
φ = Winkel mit Scheitel im Scheibenmittelpunkt.
k = Momenterzeugende Kräfte am Scheibenrand.
H = Dicke der Scheiben am Rand.

v = Parameter der Lösungsparabeln.
w = Parameter der Lösungskreise (Radius).
γ = Änderung eines rechten Winkels bei Beanspruchung.
t — Tangentialrichtung.
F = Spannungsfunktion.
L = Ableitung von F nach r (oder x).
K = Tangentialkraft des Überzuges.
A,B = Reaktionskräfte an den Auflagepunkten
f oder s = Brennweiten.

I. Einleitung

§ 1. Allgemeines

Im Gegensatz zur gewöhnlichen Glaslinse ist bei der dynamischen Linse nicht ein starrer Körper optisch wirksam, sondern eine Flüssigkeit. Zwei dünne Scheiben aus elastischem Material sind so in eine Fassung eingespannt und abgedichtet, daß man dazwischen die optische Flüssigkeit einfüllen kann. Eine Änderung der Krümmung der die Linse begrenzenden Flächen, die durch äußere Einwirkung, insbesondere durch Druck auf die Füllflüssigkeit erzielt werden kann, ergibt eine Variation der Brennweite der Linse. (Die Brennweiten von Linsen mit sonst gleichen optischen Konstanten sind den Krümmungsradien proportional.) Die dynamische Linse war in unserem Institut schon Gegenstand verschiedener Arbeiten von F. Dessauer und F. Meier [1], [2], [3]. Im folgenden werden diese Arbeiten abgekürzt mit I, II und III bezeichnet.

Arbeit I befaßt sich mit den Grundlagen der dynamischen Linse, mit der Trennung der Linsenelemente in:

1. *Linsenschale*, als Grenzfläche zwischen Linsenkörper und Umgebung.
2. *Linsenform*, die bei unseren Experimenten durch mechanische Druck- und Zugkräfte (aber möglicherweise auch durch andere, etwa magnetische oder elektrische Einflüsse) variiert wird.
3. *Linseninhalt* oder *Linsenfüllung*, die möglichst den ganzen (mindestens aber den überwiegenden) Anteil an den Materialkonstanten (Brechungsindex, Dispersionszahl, Filtration usw.) übernimmt.

Für jeden dieser drei Begriffe sind dort die für die technische Realisierbarkeit notwendigen Forderungen gestellt. Die größten Schwierig-

[1] F. Meier und F. Dessauer: Studie über die dynamische Linse, H. P. A. **14**, 271, 1941.
[2] F. Dessauer: Studien über die dynamische Linse 2, ds. **14**, 574, 1941.
[3] F. J. Meier: Studie über die dynamische Linse, ds. **16**, 277, 1943.

keiten liegen in der Beschaffenheit der Linsenschalen. Für diese sind folgende Bedingungen zu stellen:

1. Die Durchbiegung soll groß gegenüber der Scheibendicke sein, was man eventuell durch eine Vorkrümmung erzielen kann.
2. Das Material soll möglichst « kautschukelastisch » sein, d. h. die Verformung soll mit möglichst kleiner Relaxationszeit reversibel sein.
3. Die Plastizität soll verschwindend sein.
4. Die einmal erzielte Krümmung soll sich mit der Zeit nicht verändern.
5. Die Durchbiegung der Scheiben soll unabhängig von störenden Einflüssen sein.

Die Verwirklichung der dynamischen Linse hängt vor allem davon ab, ob die Voraussetzung 4. erfüllt werden kann. Konstanter Druck auf die Linsenfüllung führt zu keiner Lösung, da keine bleibende Gleichgewichtsform zustande kommt, indem praktisch das Scheiben- oder das Dichtungsmaterial fließt. Aussichtsreicher erweist sich die Arbeitsbedingung, das Volumen konstant zu halten. Ein weiteres Resultat dieser Arbeit ist die Feststellung: « Die Randbedingungen, also Fassung, führen zu Störungen, so daß sich die parabolische Form erst in einer gewissen Entfernung vom Rande aus entwickeln kann. Dem kann durch geeignete technische Maßnahmen (z. B. eine leichte Vorkrümmung der Fassung oder Veränderung der Dicke der Haut am Rande) begegnet werden. »

In Arbeit II werden die Eigenschaften der dynamischen Linse mit Rücksicht auf die einzelnen Anwendungsmöglichkeiten diskutiert, wie Projektionslinse mit unabhängiger Einstellung der Bildgröße und der Bildentfernung, Herstellung relativ billiger Linsen mit großem Durchmesser, auf verschiedene Entfernungen akkomodierbare Brille. Asphärische Linsen lassen sich leichter herstellen als bei geschliffenem, festem Linsenkörper. Das Prinzip der dynamischen Linse stellt die Parameter der früheren Linse: Bruchzahl, Dispersion, Krümmungsart, Krümmung und Linsendicke frei. Dadurch ist die Korrektur der verschiedenen Linsenfehler möglich. Es können auch in verschiedenen Richtungen verschiedene Krümmungen erzeugt werden, was für Brillen für astigmatische Augen Anwendung finden kann.

Zur weiteren Diskussion seien hier zuerst die wesentlichen Unterschiede der Cartesianischen und der sphärischen Flächen zur Erinnerung gegenübergestellt:

Von einer Cartesianischen Fläche wird die Eigenschaft verlangt, alle von einem Gegenstandspunkt ausgehenden Strahlen in einem Bildpunkt zu vereinen. Die tatsächliche Abbildung geschieht bei ihr nur für brennpunktnahe Punkte, dafür mit Strahlenbündeln großer Öffnung.

Bei der sphärischen Fläche hat man eine Abbildung nur für achsennahe Gegenstände und für enge Bündel. Bei schiefem Einfall gibt selbst ein solches schmales Strahlenbündel keine Abbildung.

Bei der dynamischen Linse ist die Krümmung der Linsenschalen im allgemeinen parabolisch, also stellt die dynamische Linse eine Annäherung an Linsen mit Cartesianischen Begrenzungsflächen dar. In der Arbeit II wird dies theoretisch untersucht, mit dem Ergebnis: Die parachsiale Vereinfachung ist für parabelähnliche Rotationsflächen in höherem Grade erlaubt wie für sphärische. Dies ermöglicht unter anderem große Linsen zu konstruieren, bei denen nur die zentrale Zone benützt wird. So wird der Parameter ρ (Krümmungsradius) frei, d. h. die Vergrößerung kann frei gewählt werden. Durch Kombination verschiedener Linsen (Flüssigkeitslinsen oder feste und dynamische Linsen zusammen) besteht die Möglichkeit der rein experimentell durchführbaren Korrektur der Linsenfehler. An einem Beispiel wird die Korrektur der chromatischen Aberration einer dynamischen Bikonvexlinse behandelt.

Arbeit III ist eine Erweiterung der Arbeit I und eine experimentelle Unterstützung derselben. Es werden dann für das Material Forderungen gestellt, wie die der Klarheit, der Lichtbeständigkeit und der geringen Reflexionsverluste. Der experimentelle Teil dieser Arbeit ergab die nachfolgend kurz zusammengefaßten Resultate:

Es gibt leicht biegsame und klar durchsichtige Kunststoffe (darunter das sog. Plexiglas), die als Linsenschalen wirken können. Man muß aber mit elastischen Nachwirkungen rechnen, die sich nicht eliminieren, aber auf physikalischem Wege einschränken lassen. Es ergab sich:

1. Bei p (Druck) = const.: elastisches Verhalten bei kurzzeitigen Belastungen, sonst Nachdehnen und Kaltfluß.

2. Bei Einhalten der Bedingung: Füllvolumen = const., durch Abschließen der Linsenkammer nach Erreichen der gewünschten Durchbiegung: Nur bei strenger Gültigkeit des Hooke'schen Intervalls bewirkt die Volumkonstanz die zeitliche Konstanz der Durchbiegung und der Wölbungsform. In Ermangelung von kautschukartigen Stoffen muß

allgemein mit Fließen gerechnet werden. Bei Beschränkung der Beanspruchung und Inkaufnahme remanenter Verformung kann erreicht werden, daß die Nachwirkungen hinreichend klein bleiben, um genügende Formkonstanz zu ermöglichen.

3. Der Typus der Meridianlinie der Linsenschalen ist im allgemeinen eine Parabel 4. Ordnung. Diese Kurve kann durch Verminderung der Biegungssteifigkeit oder durch Variation der Randbedingungen gesteuert werden. Zur vollkommenen Lösung der Aufgabe ist die Steuerung der aus der Durchbiegung resultierenden Linsenform und die Stabilität des Linsenmaterials anzustreben.

Außerdem wurden in der Arbeit III alle prinzipiellen Fragen für die Konstruktion einer dynamischen Linse erörtert. Es wurden verschiedene Materialien für die Linsenschalen und eine große Menge Füllflüssigkeiten in Hinsicht auf ihre Eignung als Linsenflüssigkeit untersucht.

Die vorliegende Arbeit ist eine Weiterführung der vorangegangenen Arbeiten, insbesondere von III.

Eine sphärische oder durch andere Flächen (2. Grades) begrenzte Linse besitzt gewisse « Fehler ». Der Ausdruck Fehler ist, wie vielfach in der Spezialliteratur bemerkt, nicht korrekt. Es handelt sich eher um Abweichungen von den gewünschten Abbildungseigenschaften. So nennt man sphärische Aberration die Eigenschaft von Linsen mit sphärischen Begrenzungsflächen, die durch die Randzonen gehenden Strahlen stärker zu brechen als die inneren Strahlen. Es handelt sich in diesem Falle also nicht um einen « Fehler » der Linse, sondern etwa um die Abweichung der sphärischen Fläche gegenüber der Cartesianischen. Wegen dieser Abweichung ist die Zuordnung von Gegenstand und Bild nicht ein-eindeutig.

Die chromatische Aberration ist die Erscheinung, daß außerdem die Lage der Bildpunkte noch von der Farbe des Lichtes abhängt, und dies gleichfalls bei exakten Kugelflächen.

Das Ziel der Arbeit war die Untersuchung der Eigenschaften der dynamischen Linse, die der sphärischen Aberration bei einer Kugelfläche entsprechen. Um diesen und andere Fehler zu beheben, stehen bei der dynamischen Linse die Parameter: Brechzahl, Dispersion, Krümmungsart, Krümmungsgrad und Linsendicke zur Verfügung [1].

[1] II. S. 575-576.

Bei der Korrektur eines « Fehlers » sollten aber möglichst viele Parameter noch frei bleiben zur Behebung der verbleibenden Linsenfehler.

Im Gegensatz zur starren Linse besteht bei der dynamischen die Möglichkeit raumgeometrisch solche Formen herzustellen, die der Cartesianischen Fläche näherkommen, also keine oder geringe sphärische Fehler zeigen. Dafür muß aber, was im Wesen der Cartesianischen Fläche liegt, größeres Koma in Kauf genommen werden. Die Mittel dazu sind in den Arbeiten I und II teilweise schon angedeutet. Ihre Tragweite war theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die dabei wie erwartet auftretenden technisch-experimentellen Hindernisse konnten wegen kriegsbedingter Materialschwierigkeiten nicht ganz überwunden werden.

§ 2. Material

Den Angaben der Arbeit III gemäß wurde vorerst für die Linsenschalen Plexiglas verwendet. Es wurde dann immer schwieriger, dies aus der einzigen Produktionsstätte (Deutschland) zu erhalten. Gewisse interessante Sorten wurden überhaupt nicht mehr hergestellt, die spärlich noch erhältlichen Mengen waren ungleichmäßig in der Dicke und schienen immer mehr störende unregelmäßige Gleiterscheinungen aufzuweisen. Später wurde Plexiglas durch dünnes Silikatglas ersetzt. Auch bei diesem war es teilweise schwer, genügend genau zugeschliffenes und hinreichend dünnes Material zu erhalten.

Als Füllflüssigkeit diente Paraffinöl und später Glycerin. Dieses besitzt gegenüber Paraffinöl den Vorteil Kautschukdichtungen nicht anzugreifen, so daß diese einen mehrfachen Gebrauch zulassen, während bei Paraffinöl die Kautschukringe bei jedem Zusammenstellen der Linse ersetzt werden mußten.

Es wurden auch Versuche mit Gelatinefüllung durchgeführt.

§ 3. Spezielle Ziele

Hinsichtlich der gestellten Aufgabe — Untersuchung und Behebung der zur sphärischen Aberration analogen Eigenschaften — war zunächst zu bedenken, daß die Korrektur bei Änderung der Brennweite einer dynamischen Linse beibehalten werden soll.

Die Verwirklichung der verschiedenen möglichen Wege stieß dabei auf Schwierigkeiten, hauptsächlich in Bezug auf das Einspannen und

Abdichten der Linsenscheiben. Außerdem kamen die oben schon angedeuteten Schwierigkeiten durch den Krieg dazu, so daß es nicht möglich war, alle prinzipiell möglichen Lösungen zu untersuchen.

Bei Beschränkung auf Sammellinsen wurden, den Zeitumständen Rechnung tragend, folgende Fragen behandelt:

Randbedingungsfragen, speziell Dichten und Einspannen der Scheiben;

Kombination von Linsenschalen;

Zusammenhang zwischen Krümmung und Aberration;

Elastizität von Glas;

Möglichkeiten einer Verkürzung der Brennweiten bei Flüssigkeitslinsen, und endlich die Hauptfrage:

Korrektur der Zonenabweichung (die der sphärischen analoge Aberration):

A) Korrektur der Einzelfläche durch Berücksichtigung der Abhängigkeit der Aberration vom Radius und von der Dicke der einzelnen Scheiben (experimentell), und durch Profilieren der Scheiben (theoretisch).

B) Korrektur mit mehreren Flächen, bei verschiedenen Füllflüssigkeiten oder mit der Kombination von Linsenschalen verschiedener Dicke (experimentell). Zu dieser Art der Korrektur gehört auch die dynamische Meniskuslinse einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von F. Dessauer (theoretisch).

Definition. Im folgenden wird eine Linse, deren Brennweite für Randstrahlen kleiner ist als für Strahlen der mittleren Zone, *sphärisch* genannt, denn dieses Verhalten ist dasjenige der ideal sphärisch abgegrenzten Linsen. Im entgegengesetzten Fall, also bei größerer Brennweite der Randstrahlen gegenüber den achsennahen Strahlen, nennen wir die Linse *antisphärisch.*

Festlegung. In allen Abbildungen über die Druckabhängigkeit der Zonenbrennweiten besteht folgende Zuordnung:

–•–	I.	Zone,	0,5 cm	von	der	Achse (∅ = 1 cm)
–••–	II.	»	1,0 cm	»	»	» (∅ = 2 cm)
–•••–	III.	»	1,5 cm	»	»	» (∅ = 3 cm)
–••••–	IV.	»	2,0 cm	»	»	» (∅ = 4 cm)

In den prozentualen Darstellungen der Aberration entspricht die ganze eingezeichnete Ordinate der Linsenöffnung von 4 cm.

II. Messeinrichtung und Linsenfassungen

§ 1. Wetthauer-Gerät

In unserem Institut wurde zur Prüfung der Linsen ein Gerät nach den Angaben von Wetthauer konstruiert [1]. Das Wetthauer-Gerät besteht aus einem Kollimator mit Zonenblende und Wahlscheibe, wodurch jeweils zwei parallele schmale Lichtbündel zur Abbildung des Spaltes durch den Prüfling durchgelassen werden. Den Schnittpunkt (Brennweite) sucht man auf einer schwach geneigten Ebene (Abb. 1). Die Verlagerung des Bildpunktes beim Wechsel der Zonen ist die

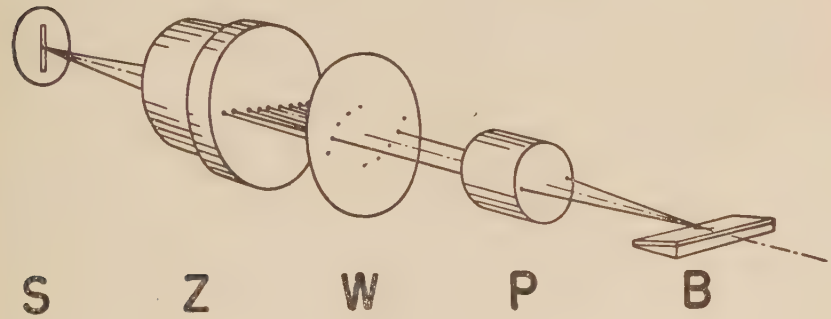

Abb. 1. Grundsätzlicher Aufbau für die Wetthauer-Methode. (Dem Prospekt der Askania-Werke über ihr Objektivprüfgerät entnommen.) S = Spalt, Z = Zonenblende, W = Wählerscheibe, P = Prüfling, B = Bildebene.

[1] A. Wetthauer: Eine Methode zur Prüfung von photographischen Objektiven durch streifende Abbildung. Z. f. Instr. k. **41**, 148-152, 1921.

A. Wetthauer: Die Prüfung der Koma und des Farbenvergrößerungsfehlers bei photographischen Objektiven nach der Methode der streifenden Abbildung, sowie einige Ergänzungen zur Untersuchung der sphärischen Aberration. Z. f. Instr. k. **51**, 553-559, 1931.

A. Wetthauer: Untersuchung von Fernrohrobjektiven mit Hilfe der streifenden Abbildung unter Anwendung der Autokollimation do. **51**, 593-596, 1931.

gesuchte Aberration. Das Gerät gestattet die Zonenabweichung direkt zu photographieren (Abb. 2). Durch Verwendung von Farbfiltern läßt sich natürlich auch die chromatische Aberration messen.

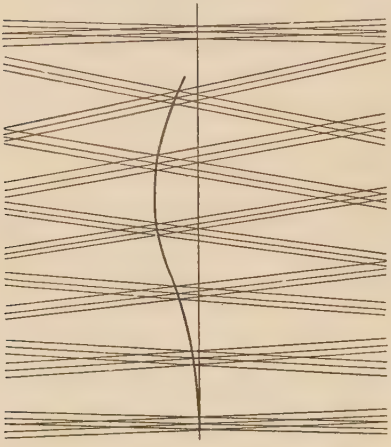

Abb. 2. Wetthauer-Aufnahme einer Linse mit sphärischer Aberration.

Als Lichtquelle diente eine 500 W Philora-Quecksilberlampe mit Wasserkühlung, oder eine Kohlenbogenlampe.

§ 2. Auferlegung der Randbedingungen (Linsenfassungen)

Die Art der Einspannung der Linsenschalen (frei am Rand drehbar, mit oder ohne feste Randvorkrümmung usw.) hat einen merklichen Einfluß auf die Form der unter der Druckwirkung durchgebogenen optisch wirksamen Flächen [1]. Es mußte also mit Linsenfassungen gearbeitet werden, die es gestatteten, mit verschiedenen Randbedingungen zu experimentieren.

1. Meniskuslinse (Abb. 3).

Diese Linse verwendet das Prinzip des abgeschlossenen Flüssigkeitsvolumens nach der schon erwähnten, noch nicht veröffentlichten Arbeit von F. Dessauer.

Die Linsenkonstruktion zur experimentellen Unterstützung jener Arbeit wurde von S. H. Metzger projektiert und für die vorliegende Arbeit überlassen, wofür hier verbindlichst gedankt wird. Die Fassung wurde später zur Aufnahme der weiter unten zu beschreibenden Schwingringe umgebaut, die an Stelle der Ringe für feste Randvorkrümmung traten.

2. Einkammerlinse (Abb. 4).

Diese Linse wurde für einen möglichst vielseitigen Gebrauch konstruiert. Die auswechselbaren Schwingringe gestatteten das Einspannen von Scheiben in Durchmessern von 92, 85 und 73 mm ; in der Meniskuslinse sind solche von 65 und 72 mm möglich.

[1] III. S. 293.

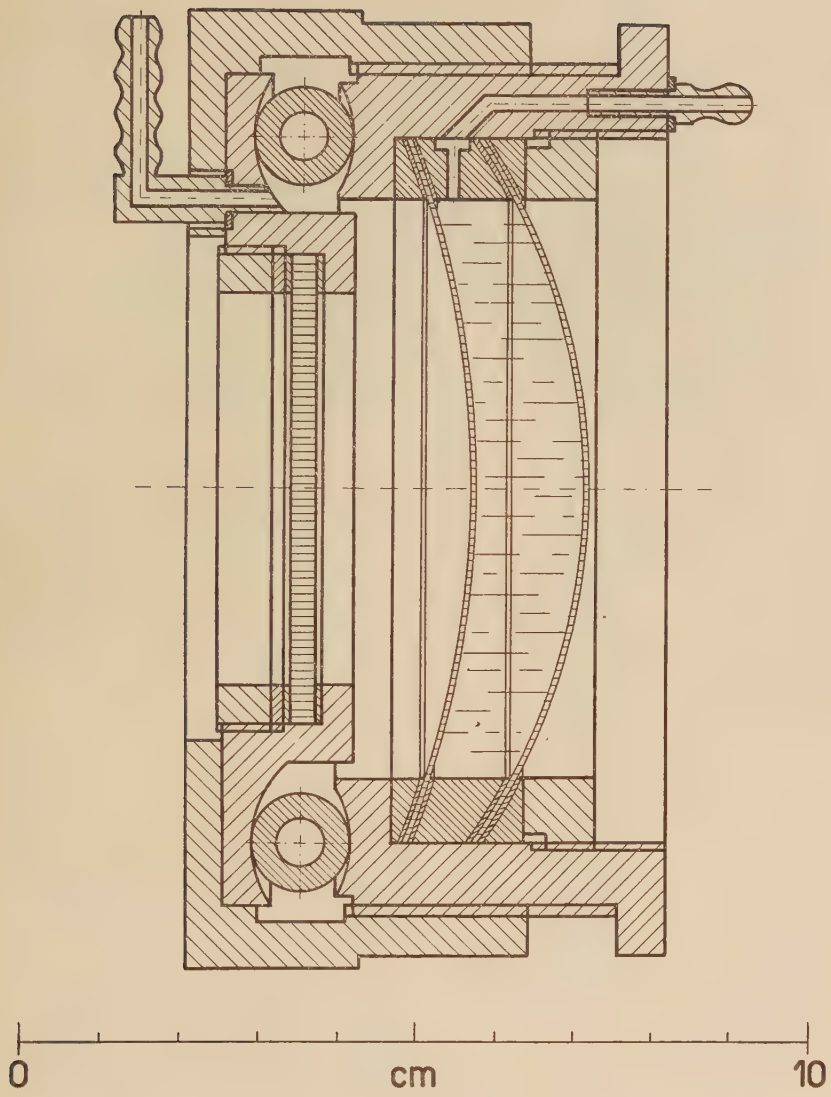

Abb. 3. Schnitt durch die Meniskuslinse.
Die beiden eingespannten Linsenschalen haben feste Randvorkrümmung.

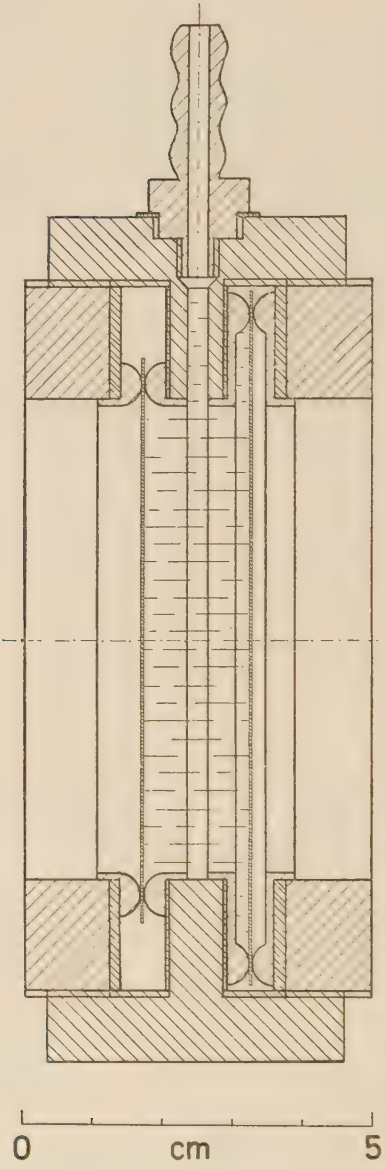

Abb. 4. Einkammerlinse.
Die beiden Linsenschalen sind mit Schwingringen verschiedenen Durchmessers eingespannt.

Die Fassung für die Meniskuslinse kann auch als Einkammerlinse verwendet werden, oder als Zweikammerlinse mit nur zwei optisch wirksamen Flächen (Abschn. X § 5).

3. Dreikammerlinse (Abb. 5).

Durch Zusammenstellen zweier gleicher Einkammerlinsen und Abdichten des Zwischenraumes entstand eine Dreikammerlinse mit noch vielseitigeren Anwendungsmöglichkeiten, wie die in der Arbeit II erwähnten [1].

§ 3. Druckeinrichtung

Die Durchbiegung der Linse läßt sich auf verschiedene Arten erzielen:

1. Variabler Flüssigkeitsdruck.
2. Variabler Gegendruck (In der Dreikammerlinse, Druck in einer nur mit Luft gefüllten Kammer).
3. Elastische Büchsen.
4. Federnde Fassungen.

Für die vorliegende Arbeit wurden einzig die Möglichkeiten 1 und 2 benützt. Zur Erzeugung eines meßbaren Flüssigkeitsdruckes oder Luft-Gegendruckes diente die gleiche Apparatur wie in der Arbeit III [2].

Die Druckeinrichtung besteht im wesentlichen aus zwei durch einen Schlauch verbundene Quecksilberbehälter. Der eine läßt sich in einer Höhe von etwa einem Meter stufenweise verstellen, während der andere mit einer Schraube eine Feineinstellung der Höhendifferenz gestattet.

[1] II. S. 580.
[2] l. c. S. 298.

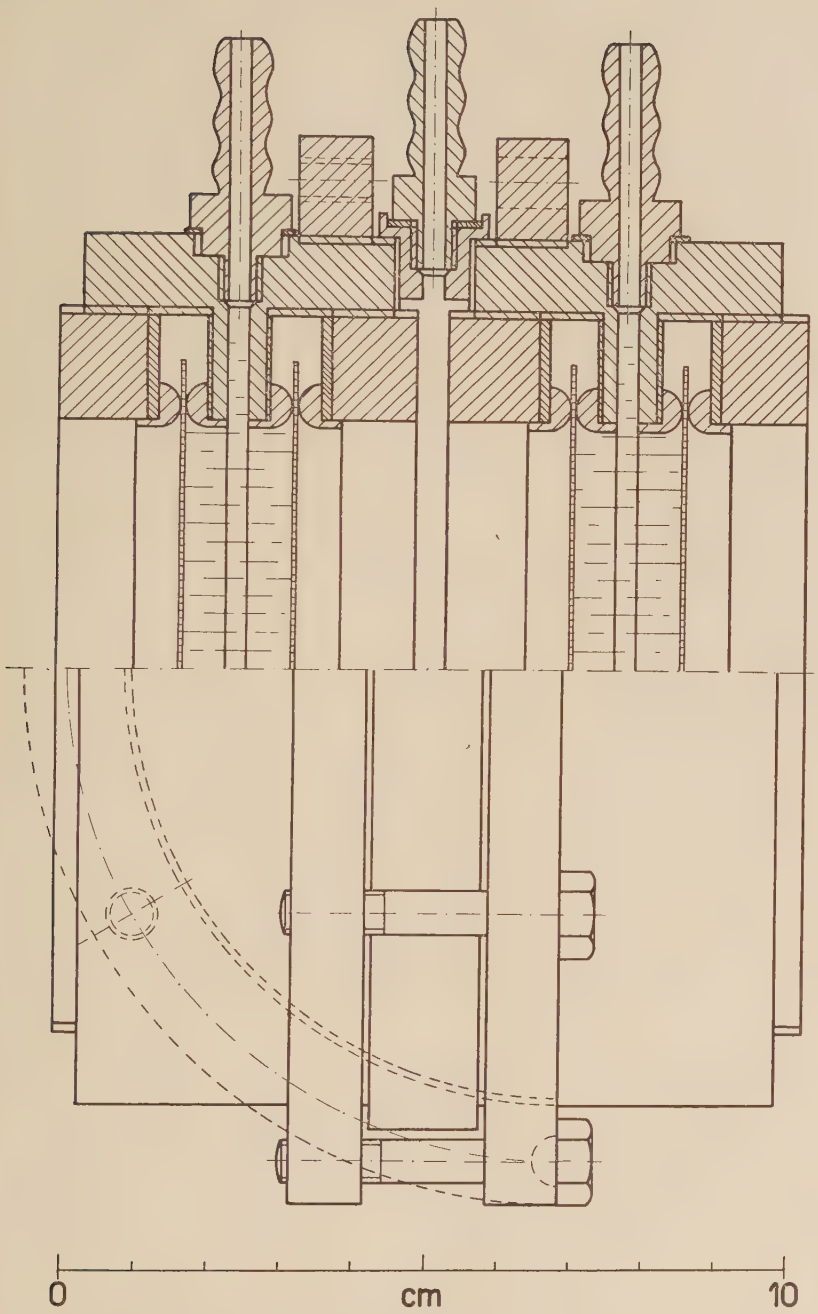

Abb. 5. Dreikammerlinse, bestehend aus zwei gleichen Einkammerlinsen und einem Zwischenring.
Alle vier Scheiben mit gleich großen Schwingringen gezeichnet.

Die Höhendifferenz der beiden Quecksilberniveaus gibt den an einem Manometer abgelesenen Druck auf die Linse. Im Gegensatz zur Arbeit III diente hier Luft (nicht eine Flüssigkeit) zur Druckübertragung. Da befriedigende Resultate in Hinsicht auf Konstanz der Verformung nur erreicht werden können unter der Bedingung, daß das Füllvolumen und nicht der Druck konstant gehalten wird [1], war vor der Linse immer ein Hahn angebracht, der es gestattete, den Linseninnenraum nach der Druckübertragung abzuschließen.

Bei der Verwendung der dynamischen Linse zur Projektion ist eine solche Laboratoriumseinrichtung viel zu umständlich und schwerfällig. Für diesen und ähnliche Zwecke wurden kleine Handpumpen konstruiert, die einfach einen durch eine Schraube mit Handrad verstellbaren Kolben aufweisen. Die Pumpen sind über einen Dreiweghahn mit der Linse und der Außenluft (oder einem Reservoir mit Linsenflüssigkeit) verbunden.

[1] Arbeiten I und III.

ERSTER TEIL

Die Schalen der dynamischen Linse

III. Einspannen

§ 1. Vorkrümmung des Randes

Nach der Dissertation von F. J. Meier [1] ist die Meridianform der unter Flüssigkeitsdruck ausgebogenen Scheibe eine Parabel vierter Ordnung. Eine solche ist gegenüber der Parabel zweiter Ordnung am Rande abgeflacht und in der Mitte stärker gekrümmt. Dadurch entsteht eine Überkorrektur der sphärischen Aberration, denn die Randstrahlen werden wegen der geringeren Krümmung der entsprechenden Linsenzone eine größere Brennweite besitzen als die durch die stark gekrümmte Mittelzone gehenden Strahlen.

Um die Meridianform im Sinne einer Korrektur zu beeinflussen, lag es nahe, beim Einspannen den Schalen am Rand durch geeignete Fassungsringe eine feste Vorkrümmung zu erteilen [2]. Die Ringe paßten paarweise genau aufeinander. Beim Zuschrauben der Linsenfassung wurden die Ringpaare so gegeneinander gepreßt, daß sie der zwischen ihnen liegenden Linsenschale die gewünschte Vorkrümmung erteilten. Der Firma Kern in Aarau sei hier für die Herstellung dieser Ringe bestens gedankt.

Bei schwacher Vorkrümmung gab sich der gewünschte Effekt, d. h. eine Verringerung der antisphärischen Aberration. Eine Steigerung der Vorkrümmung verbesserte die Korrektur nicht, sondern sie zeigte sich als zwecklos; denn hiebei spannt sich die Membran so stark, daß die Randkrümmung selbst bei Vorhandensein des Flüssigkeitsdruckes

[1] III.
[2] I. S. 279.

schwächer bleibt (Abb. 6). Dies zeigte sich am optischen Verhalten der Linsen und auch an der plastischen Verformung der herausgenommenen Schalen, die bei starker Randkrümmung flacher als bei schwacher Krümmung war.

Da wegen der Kriegsereignisse das Plexiglas als Material für weitere Versuche bei Seite gelassen werden mußte und mit dünnem Silikatglas weitergearbeitet wurde, mußte auf diese Einspannungsart mit Randkrümmung verzichtet werden.

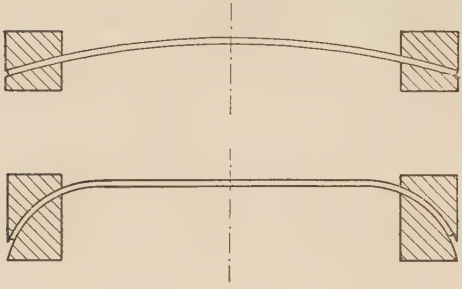

Abb. 6. Linsenschalen mit starker und schwacher Randvorkrümmung.

Silikatglas weist den Vorteil auf, wegen seiner elastischen Eigenschaften bei einer gegebenen Linse reproduzierbare Meßwerte zu liefern. Abweichungen sind bei Benutzung dieser Glasart nur bei neu zusammengesetzten Linsen aufgetreten, so daß sie auf Verlagerungen bei der Montage zurückgeführt werden müssen, die keine Rolle spielen. Die Erscheinung ist im nächsten § 3 gesondert behandelt.

Der Übergang zu Silikatglas soll natürlich nicht heißen, daß Plexiglas unbrauchbar sei, denn beim Einhalten der Bedingung konstanten Füllvolumens wird das Fließen stark verringert [1], doch ist es experimentell viel einfacher unter der Bedingung Druck = konstant zu arbeiten, was bei Silikatglas möglich ist.

§ 2. Schwingringe

An Stelle fester Vorkrümmung oder flach eingespannter Schalen wurden für Silikatglas durchwegs « Schwingringe » verwendet. Diese Ringe tragen so abgerundete Wülste, daß die zwischen ihnen eingeklemmten Scheiben sich nahezu frei drehen können (Abb. 7). Die Verhältnisse nähern sich auf diese Art (gegenüber fest eingespannten Schalen) denjenigen der frei aufliegenden Platte.

[1] III. S. 304.

N. B. Nur unter der Voraussetzung der Freiheit der Drehung (bzw. des freien Aufliegens) wird später die Berechnung der Membrandicke als Funktion des Radius für eine vorgegebene, gewünschte Form der elastischen Linie durchgeführt werden können, denn ein festes Einspannen bedeutet die Festlegung einer Randbedingung, über die man noch frei verfügen sollte.

Abb. 7. Prinzip der Schwingringe.

Die Berechnung ergibt, daß selbst im Idealfall des freien Aufliegens ein Wendepunkt der Meridianlinie auftreten wird [1].

§ 3. **Randdruck** (Randpressung)

Plexiglas besitzt gegenüber Silikatglas viele Vorteile. Plexiglas ist billiger, einfacher und weniger empfindlich in der Behandlung (Schneiden, Einspannen usw.), es läßt sich stärker biegen und ermöglicht so kleinere Brennweiten, die Bruchgefahr ist geringer. Letzter Punkt hat auch für die Experimente praktische Bedeutung, denn bei einem Bruch fließt der Linseninhalt heraus, was zu einer Beschädigung der Apparatur führen kann. Demgegenüber fließt Plexiglas merklich, und aus diesem Grund wurden Versuche mit Linsenschalen aus Silikatglas durchgeführt. Die Erwartungen hinsichtlich der Reproduzierbarkeit bei Silikatglaslinsen wurden anfänglich enttäuscht durch nicht reproduzierbare Resultate. Die Reproduzierbarkeit war aber das entscheidende Argument gewesen für die Wahl von Silikatglas trotz den damit in Kauf genommenen erschwerten Arbeitsbedingungen.

Bei den Erwägungen über die Zweckmäßigkeit Silikatglas zu verwenden entstand der Verdacht, daß die Abhängigkeit der Durchbiegung von der Pressung der Einspannringe viel größer sei als die Änderung durch die plastischen Verformungen des Plexiglases. Aus diesem Grunde wurde der Einfluß der Randpressung untersucht:

Bei gleichbleibender Dicke der Linsenschalen und gleichem Durchmesser der Scheiben wurde die Abhängigkeit der Brennweiten für die verschiedenen Zonen vom Flüssigkeitsdruck von der stärksten möglichen bis zur schwächsten, gerade noch dicht haltenden Pressung gemessen. Für eine mathematische Behandlung sind die Verhältnisse

[1] III. S. 294.

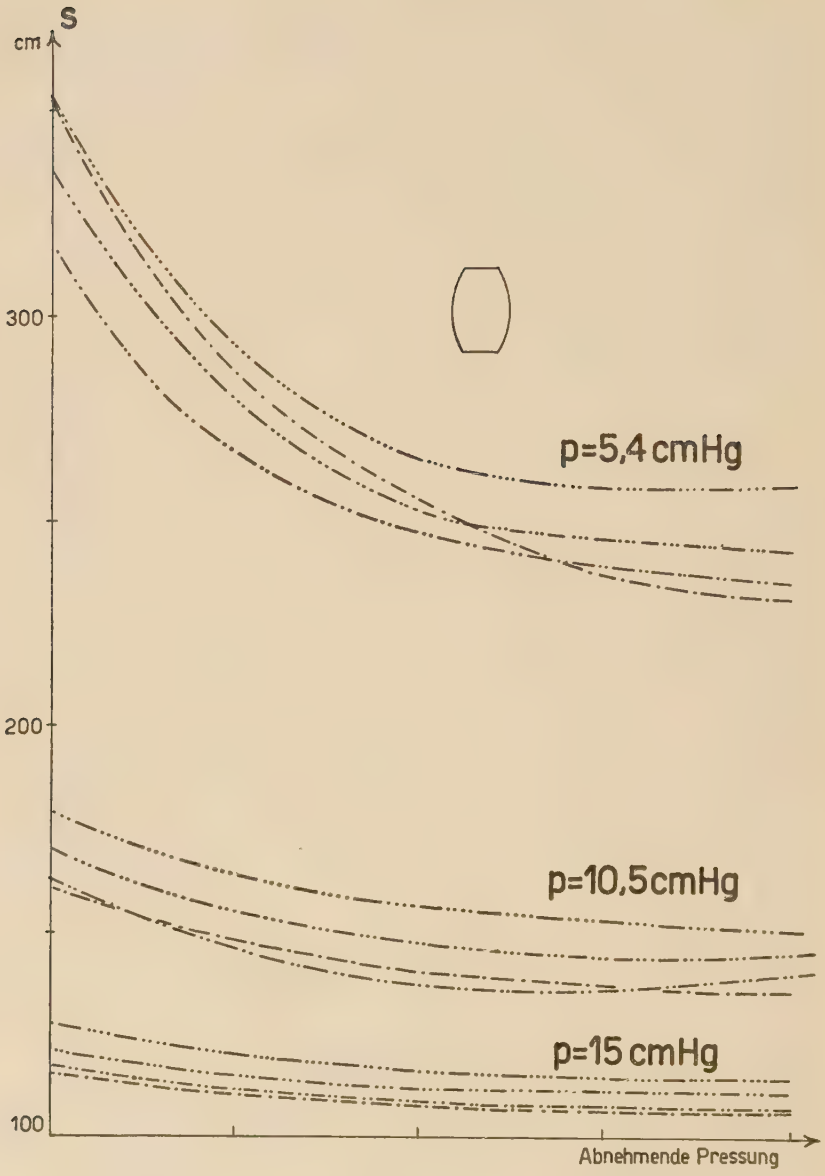

Abb. 8. Randpressung. Erklärung im Text. Silikatglas.
d = 0,7 mm, ∅ = 85 mm, $\varnothing_s$ = 73 mm.

übersichtlicher bei starker Pressung, denn der mathematisch einfachere Fall liegt vor, wenn die Schale in der Fassung nicht gleiten kann und doch die Möglichkeit besitzt frei zu « schwingen ». (Am leichtesten ist die theoretische Behandlung der eingeklemmten Scheibe, ein Fall, der aber für uns nicht in Frage kommt, da er sich nicht mit den in § 2 N. B. schon angedeuteten Bedingungen für die Lösbarkeit der später gestellten Aufgabe verträgt.)

Um eine Übersicht über den Einfluß der Randpressung zu erhalten, wurden 5 Drehwinkel des anpressenden gewindetragenden Ringes markiert und so für die entsprechenden 5 Randpressungen die Brennweiten bei je drei Flüssigkeitsdrucken (5,4 ; 10,5 ; 15 cm Hg) gemessen.

In der graphischen Darstellung (Abb. 8) wurde auf der Abszisse die nach rechts abnehmende Randpressung aufgetragen, auf der Ordinate die Zonenbrennweiten s. Der Flüssigkeitsdruck ist Parameter der Kurvenscharen. An Hand der Kurven läßt sich das Herausgleiten der Linsenschalen aus den Fassungen leicht verfolgen. Man sieht vor allem bei der obersten Kurvenschar ($p = 5{,}4$ cm Hg), wie sich die Schale beim Gleiten in der Mittelzone stärker biegen läßt (Verkürzung der entsprechenden Brennweite). Bei hohem Druck (unterste Kurve : $p = 15$ cm Hg) biegt sich zuerst die Schale durch und bei Abnahme der Pressung steigt diese Durchbiegung nicht mehr, sondern, da das Gleichgewicht zwischen Druck und elastischer Gegenkraft schon hergestellt ist, verschieben sich die Schalen angenähert parallel zu sich selber nach außen. Die Folge ist in diesem Fall eine sehr geringe Brennweitenänderung.

Ergebnis : Die besten Resultate werden in Hinsicht auf die Reproduzierbarkeit durch starke Einspannpressung erzielt. Unter dieser Voraussetzung ist es außerdem leichter möglich, die Resultate verschiedener Linsen miteinander zu vergleichen, denn die Brennweiten sind im entgegengesetzten Fall weitgehend von der Pressung abhängig, die zunächst unkontrollierbar ist.

Die Randbedingungen werden durch hohe Randpressung konstant gehalten.

IV. Dichten

§ 1. Reproduzierbarkeit — Kautschukdichtungen

Um die Füllflüssigkeit abzudichten, kann man etwa Kautschukringe zwischen Glas und Einspannringe legen. Es war zu erwarten, daß diese Dichtungen die Reproduzierbarkeit beeinträchtigen. So wird sich vor allem bei schwacher Pressung der Einspannringe zuerst das Glas biegen, mit steigendem Flüssigkeitsdruck nimmt dann die Durchbiegung nicht mehr merklich zu, sondern das Glas führt eine Translation nach außen aus, indem es auf den Kautschukringen gleitet (Kap. III § 3). Die Linsenflüssigkeit (Glycerin) dringt zwischen Glas und Dichtungen

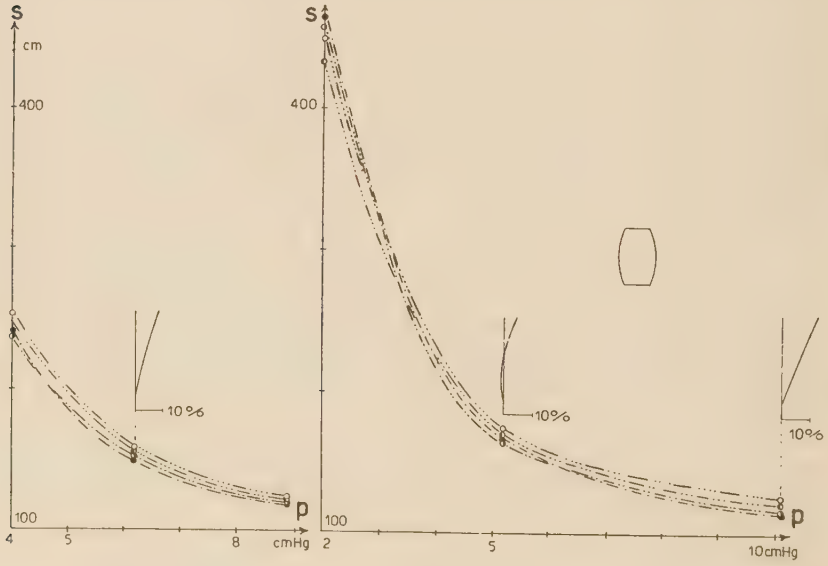

Abb. 9. Überzogenes Silikatglas. d = 0,7 mm, ∅ = 100 mm, ∅s = 92 mm. Links mit Dichtungen, rechts ohne Dichtungen.

In dieser und in den anderen Abbildungen bedeutet d die Dicke der Linsenschalen, ∅ den Durchmesser der Schalen, ∅s den Durchmesser der einspannenden Schwingringe.

ein und erleichtert so diesen Vorgang. Bei Abnahme des Druckes geht dann die Schale nicht mehr ganz in ihre Anfangslage zurück.

Bei sämtlichen Versuchen zeigte sich eine solche hysteresisartige Erscheinung bei Anwesenheit von Kautschukdichtungen.

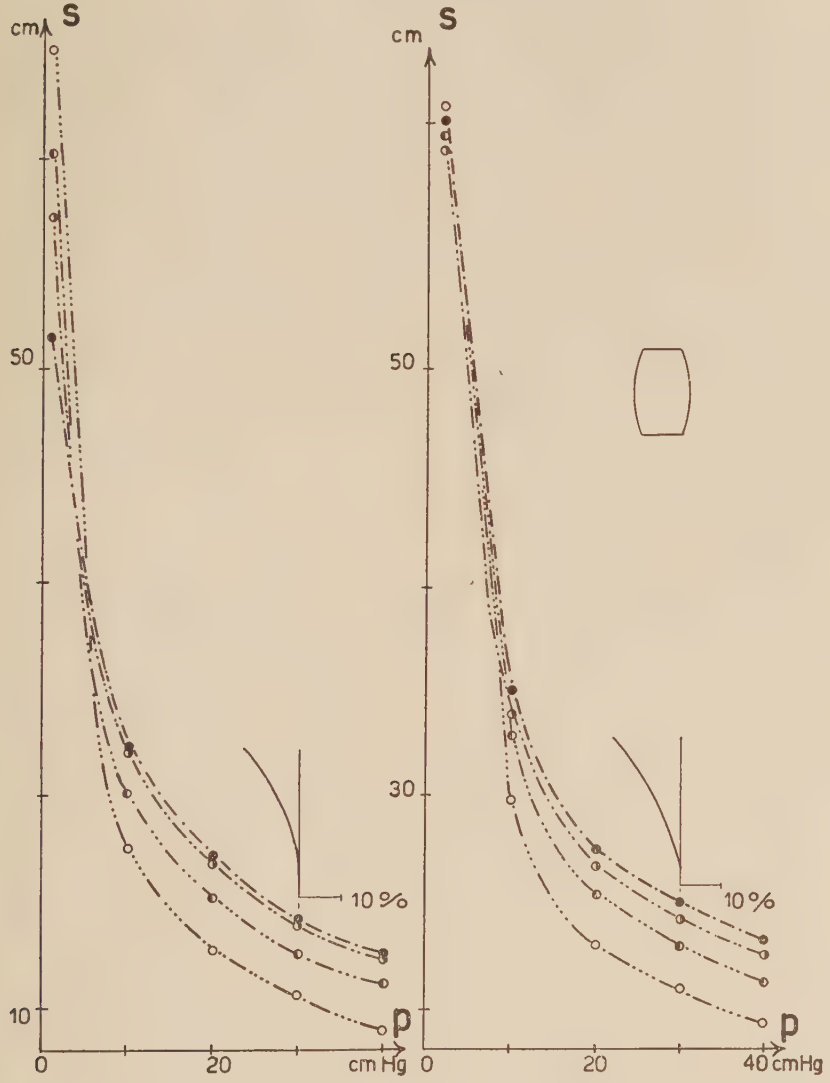

Abb. 10. Plexiglas. d = 0,5 mm, ∅ = 86 mm, ∅s = 73 mm, links mit Dichtungen, rechts ohne Dichtungen.

Außerdem machen Kautschukdichtungen die Zusammenhänge zwischen Durchbiegung und Druck unübersichtlich, so daß das Experiment von den mathematisch übersehbaren Bedingungen zu weit abweicht. Weiter wird der Einfluß der Einspannpressung durch die Anwesenheit der Dichtungen kompliziert.

Wegen dieser verschiedenen Nachteile der Dichtungen wurde versucht, ganz ohne dieselben auszukommen. Es wurde dazu Glas direkt zwischen die metallenen Schwingringe eingespannt. Die Meßresultate dieser Linse wurden mit einer identischen, aber mit Kautschukringen versehenen, verglichen (Abb. 9).

Die Aberration der Linse mit Dichtungen ergab sich als geringer als die der dichtungslosen. Die Resultate sind aber nicht genügend, da das Silikatglas wegen der Bruchgefahr nicht mit hinreichender Pressung zwischen die Metallringe hatte eingespannt werden können. Der Versuch wurde aus diesem Grund mit Plexiglas wiederholt (Abb. 10).

Bei Plexiglas lassen sich selbst beim Fehlen von Dichtungen die Einspannringe stark anziehen. Außerdem kann man erwarten, daß sich die störenden Einflüsse der Dichtungen in der Vergleichslinse erst bei großen Durchbiegungen (also bei starken Flüssigkeitsdrucken) bemerkbar machen, eine Bedingung, die mit Plexiglas leichter zu erreichen ist.

Der Charakter der Kurven ist in beiden Fällen analog : Mit Silikatglas ist bei der Linse mit Dichtungen die antisphärische Aberration größer, beim Plexiglas mit Dichtungen die sphärische Aberration geringer. Beides bedeutet, daß sich die Randzonen der mit Dichtungen versehenen Linsen weniger krümmen als ohne Dichtungen (denn ohne Dichtungen sind die Brennweiten der äußeren Zonen kürzer). Dieses Resultat entspricht der Erwartung, daß die Kautschukdichtungen den Scheiben ein freies Drehen in den Fassungsringen erschweren. Durch die Abwesenheit von Dichtungen nähern sich die Bedingungen stärker dem theoretischen Idealfall der scharfen Auflageschneiden, der sich praktisch nicht durchführen läßt.

Zur Verringerung der antisphärischen Aberration sind also Dichtungsringe ungünstig. Außerdem bringen diese den Nachteil mit sich, den Linsenschalen das Gleiten in der Fassung zu erleichtern. Dieser Nachteil ist beträchtlich, wie die bei verschiedenen Messungen anfänglich unerklärlichen Anomalien ergaben. Sie ließen sich dann folgendermaßen erklären :

Beim Zerlegen der Linse, eine Prozedur, die öfters geschah, entweder um andere Schalen oder Schwingringe einzulegen, befeuchten

sich die Dichtungsringe mit Glycerin, was auch bei der größten Vorsicht geschieht, denn das Glycerin dringt in den Zwischenraum von Glas und Dichtung schon beim Lockern der Schraubenfassung. Selbst wenn die Scheiben und die Dichtungen vor dem erneuten Zusammensetzen gereinigt und getrocknet werden, bleibt noch etwas Glycerin in den Poren des Kautschuks und im Zelluloseüberzug der Scheiben (siehe Kap. V § 1). Diese restliche Benetzung läßt einerseits das Gleiten unter dem Einfluß des Innendruckes in der Linse zu und andrerseits erleichtert sie der Füllflüssigkeit weiter auf der Gummioberfläche zu kriechen wegen der größeren Oberflächenspannung gegenüber vollkommen trockenen Ringen. Die Folge ist, daß sich die Gläser durch Gleiten stärker biegen können. Will man verschiedene Meßreihen am gleichen Tage durchführen, ist jedesmal eine neue, sicher trockene Garnitur Dichtungen zu verwenden. Erst gründliches Wässern und Trocknen derselben macht sie wieder gebrauchsfähig. Beim Einhalten dieser Vorsichtsmaßregeln, d. h. beim Arbeiten mit ganz trockenen Kautschukringen, kamen die oben angeführten Unregelmäßigkeiten nicht mehr vor, so daß lange mit solchen Dichtungen gearbeitet werden konnte.

§ 2. Bleidichtungen

Im weiteren Bestreben, von den Kautschukdichtungen herrührende Fehler zu eliminieren, wurden Dichtungen aus dünnem Blei (ca. 0,5 mm) versucht. Diese Dichtungen sollten bezwecken, den bei Kautschuk vorkommenden Schub und das Gleiten auf der mit Glycerin getränkten Fläche zu vermeiden.

Bei einer Linse mit solchen Bleidichtungen wurde zuerst die Druckabhängigkeit der Brennweiten gemessen. Anschließend wurde dieselbe Linse 15 Stunden unter Druck gelassen (4 cm Hg = maximale Belastbarkeit der verwendeten Linsenschalen aus Silikatglas von 0,3 mm Dicke). Nach wiederholter Messung kamen 6 Stunden Ruhe (also ohne Druck), erneute Messung usw.

Erwartet war, daß nach einer gewissen Anzahl solcher Belastungen ein Gleichgewichtszustand angestrebt werde. Stattdessen unterschieden sich die Kurvenscharen so stark, daß von einer Gesetzmäßigkeit nicht die Rede sein kann. Die Folge der Meßwerte war sehr unregelmäßig; eigenartigerweise erhielt man nach stundenlanger Belastung der Linse sogar verlängerte Brennweiten.

Bleidichtungen kamen also für weitere Versuche nicht in Frage.

§ 3. Gekittete Schalen

Der Versuch, die Linsenschalen auf die Bleidichtungen mit dem Klebstoff Cementit festzukitten, ergab besser reproduzierbare Resultate, so daß es nahe lag, die Schalen direkt auf die Schwingringe zu kleben bei Weglassen jeder Dichtung. Eine solche Linse zeigte sogar schon nach der ersten Belastung konstante Brennweiten. Dies ist von besonderer Bedeutung, denn gerade die erste Belastung erzeugte früher einen neuen Gleichgewichtszustand. Jedoch nach 15stündiger Belastung wurde auch bei dieser Linse mit gekitteten Silikatglasscheiben die Brennweite etwas länger (je nach Zone um 5-10 %). Nach 10maligem kurzzeitigem Belasten und Entlasten (kurz « Turnen » genannt) wurden die Brennweiten wieder kürzer und fielen sogar schwach unter den Anfangswert (0-5 % je nach Zone). Nach längerer Ruhe (ohne Druck) wiederholte sich dasselbe : größere Brennweite und nach « Turnen » Abfall auf einen dem Ausgangswert nahen Betrag.

Die gekittete Linse ist bei unmittelbar aufeinanderfolgender Belastung reproduzierbar. Die Reproduzierbarkeit wird gestört, wenn die Linse mit oder ohne Druck mehr als etwa einen Tag lang stehen bleibt, es braucht aber nur einige Male « geturnt » zu werden, um wieder zu den alten Werten zu gelangen.

Braucht man die Linse so, daß bei der Änderung des Flüssigkeitsdruckes nie über einen bestimmten Grenzdruck gestiegen wird, bleibt die Linse reproduzierbar. Überschreitet man diese Grenze, so zeigt sich schon nach der ersten Belastung eine Verkürzung aller Brennweiten, auch für einen kleineren Druck. Die neuen Brennweiten sind wieder reproduzierbar. Das Verhalten ist somit analog demjenigen überdehnter fester Körper beim Zugversuch.

Die Dichtung bei den nur geklebten Scheiben (ohne Kautschuk- oder Bleiringe) zeigte sich bei den kleinen verwendeten Drucken (bis ca. 4 cm Hg bei Silikatglas) als genügend, wenn das Kleben hinreichend sorgfältig ausgeführt wurde.

Abschließend kann über den Einfluß der Dicht- und Kittmaterialien auf die Randbedingungen folgendes gesagt werden : Kautschukdichtungen erschweren das Drehen der Scheiben in der Fassung und ermöglichen leichtes Gleiten. Die Verwendung gekitteter Schalen erhöht die Reproduzierbarkeit.

V. Kombinierte Linsenschalen. Elastizität und Bruchfestigkeit

§ 1. Überzogene Scheiben

Silikatglasscheiben besitzen gegenüber den Scheiben aus Plexiglas den Vorteil, einen Bereich der Hookschen Elastizität aufzuweisen. Dies gestattet bei Silikatglas das bequemere Arbeiten mit konstantem Druck statt dem bei Plexiglas notwendigen konstanten Volumen [1]. Um den Vorteil der Hookschen Elastizität zu erhöhen und bei einem Bruch die Splitter bis zu einem gewissen Grade zusammenzuhalten, was auch die Flüssigkeit weniger leicht ausfließen läßt, wurden die Scheiben mit einem Überzug versehen. Dazu wurde Celluloselack (Cellulose-Lösung in Amyl-Acetat) über die Gläser gegossen und vorsichtig getrocknet. Beim Trocknen traten leicht Trübungen auf. Solche vermied man durch Verlangsamung des Prozesses, indem die Gläser in einer Amyl-Acetat-Atmosphäre aufgehängt wurden.

Auch andere Überzüge wurden versucht, wie Plexigum in verschiedenen Lösungsmitteln. Die Wirkungen der verschiedenen Überzüge unterscheiden sich kaum.

§ 2. Geklebte Scheiben

Jedes Material, Silikatglas und Plexiglas weist Vorteile auf. Silikatglas ist angenähert reversibel elastisch, dafür aber nur schwach belastbar. Plexiglas verträgt große Durchbiegungen, aber es besitzt ungewünschte Fließeigenschaften.

Um die Nachteile des einen mit den Vorteilen des anderen zu kompensieren, um die Elastizität von Silikatglas mit der hohen Bruchgrenze von Plexiglas zu kombinieren, wurde Silikatglas auf Plexiglas

[1] II. S. 277.

geklebt. Die Versuche wurden durchgeführt mit Silikatglasscheiben verschiedener Dicke auf Plexiglas von 0,5 mm Stärke.

Die Einflüsse der beiden Behandlungen: Überziehen und Aufkleben wurden experimentell und theoretisch untersucht. Darüber berichten wir in den folgenden Paragraphen.

§ 3. Elastizitätsmessung

Zur Untersuchung des Problems kombinierter Scheiben war es nötig, die Elastizität von Silikatglas, von überzogenem Silikatglas und von auf Plexiglas geklebtem Glas zu messen. Für Silikatglas konnte man den Elastizitätsmodul nicht aus der Literatur entnehmen, da die Zusammensetzung des zur Verfügung stehenden Glases nicht bekannt war.

Um die Messungen an kleinen Probestreifen von $l = 10$ cm Länge und $b = 1$ cm Breite auszuführen, wurde die abgebildete (Abb. 11) einfache Apparatur gebaut.

Die freundlicherweise von der Firma Omag in Neuallschwil gelieferten Platten kamen auf zwei Schneiden im Abstand von 8,3 cm zu

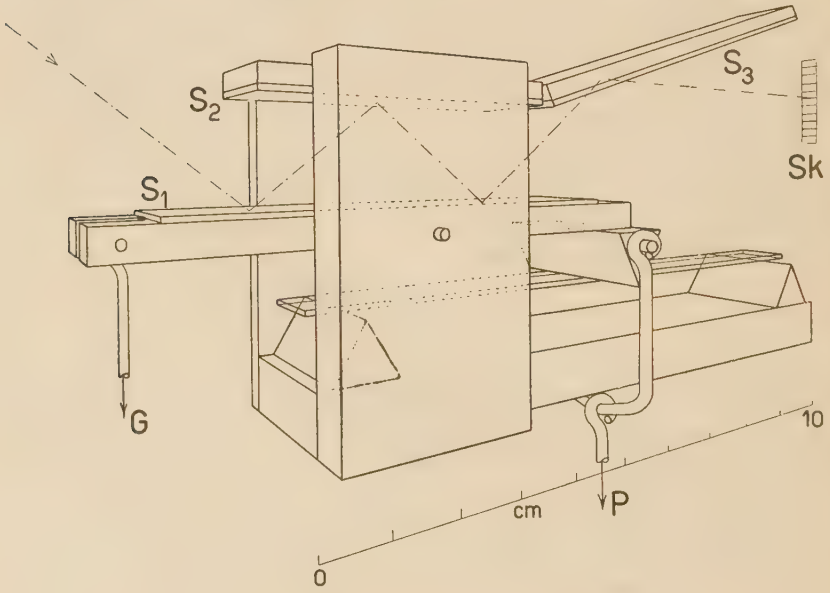

Abb. 11. Schematische Perspektive des Apparates zur Messung des Elastizitätsmoduls von Gläsern.

liegen. Die Belastung erfolgte senkrecht in der Mitte über eine dritte Schneide. Zwischen die Schneiden und das Glas wurden jeweils kleine Papierstreifen gelegt, um einen zu hohen spezifischen Druck auf die Glasoberfläche zu vermeiden. Die Belastungsschneide ist an der unteren Seite eines gleicharmigen Hebels befestigt. An der Schneide selber hing die Belastungseinrichtung, bestehend aus einem Becherglas. Schneide und Becher mit seiner Aufhängevorrichtung wurden mit Gewichten auf der anderen Hebelseite abgeglichen. Zur Belastung diente Wasser, das aus einer Meßburette in das Becherglas längs eines an der Burette befestigten Fadens (zur Vermeidung von Impulsen durch fallende Tropfen) fließen konnte. Der gleicharmige Hebel trug auf der Oberseite einen Spiegel. Zwischen diesem und einem festen Spiegel wurde ein Lichtstrahl 3 mal reflektiert um schließlich über einen weiteren festen Spiegel auf eine Skala zu gelangen. Die Eichung der Apparatur erfolgte durch Messung verschiedener Höhen der beweglichen Schneide mit Hilfe eines Kathetometers. Es ergab sich eine Verschiebung des Lichtzeigers um 42,42 Skalenteile (cm) für eine Durchbiegung von 0,1 cm. Die Eichkurve ist linear.

Die Berechnung des Elastizitätsmoduls geschah mit der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 4. Elastizität der kombinierten Gläser

Mit der oben beschriebenen Apparatur wurden die Elastizitätsmoduln für Silikatglas, Silikatglas mit Überzug und auf Plexiglas geklebtes Silikatglas ermittelt. Dabei wurde in der Rechnung als Dicke immer diejenige von Glas allein (also ohne Überzug und ohne das 0,5 mm starke Plexiglas) eingesetzt. Eine andere Art der Rechnung würde weniger durchsichtige Resultate liefern.

Aus der graphischen Zusammenstellung der Meßresultate (Abb. 12) ist ersichtlich (die berechnete Genauigkeit beträgt 4-5 %), daß der Gesamtelastizitätsmodul (was nicht dasselbe ist wie die Größe des Hookschen Bereichs) beim überzogenen Silikatglas etwas größer ist als bei Glas allein. Viel beträchtlicher ist der Unterschied, wie zu erwarten war, bei den geklebten Gläsern. Die Wirkungen des Überzuges und des aufgekitteten Plexiglases sind natürlich umso größer, je dünner das Silikatglas ist.

Auf die theoretische Behandlung des Einflusses der Kombination von Schalen auf die Durchbiegung wird weiter unten eingegangen.

Die Streuung der Werte für die Elastizitätskonstante ist größer als die Meßgenauigkeit von 5 %. Dies rührt daher, daß die Homogenität der Meßstreifen nicht sehr groß war. Die Dickenschwankungen in der

Abb. 12. Elastizitätsmodul kombinierter Gläser.
O = gemessene Werte für Silikatglas, ∅ = Silikatglas mit Celluloselack-Überzug, -O- = Silikatglas auf Plexiglas geklebt.

Längsrichtung betrugen etwa 10 μ. Bei dickeren Gläsern von 650 μ Stärke macht dies 1,5 % aus, bei dünnen von 200 μ schon 5 %. So erklärt sich auch, warum die Streuung bei den dünneren Gläsern stärker ist.

§ 5. Bruchfestigkeit

Die Kombination der Linsenschalen hat keinen großen Einfluß auf die Bruchfestigkeit, diese wird nur in geringem Maße erhöht.

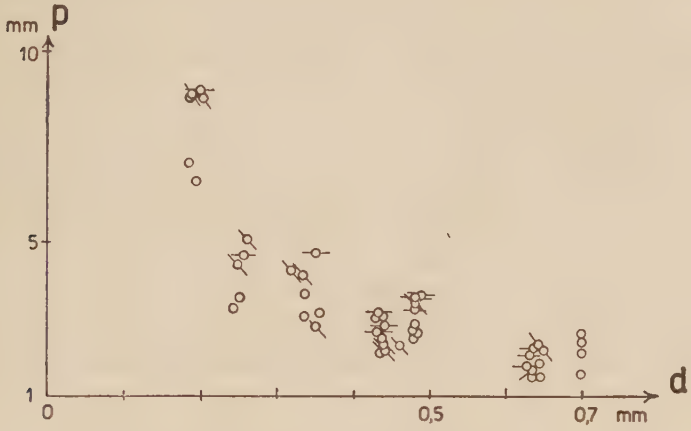

Abb. 13. Bruchfestigkeit (Durchbiegung bei Bruch).
Für die Erklärung der Zeichen siehe Abb. 12.

Trägt man die Durchbiegung bei Bruch graphisch auf, so sieht man, daß diese bei den verschiedenen Gläsern nicht stark abweicht (Abb. 13). Es läßt sich immerhin eine Tendenz zu größerer Bruchfestigkeit feststellen bei Überzug und bei Kleben. Natürlich gilt das Gesagte nur, wenn man sich auf die Durchbiegung bezieht; die zum Bruch erforderliche Belastung ist in den drei Fällen stark verschieden:

Als Beispiel diene die mittlere Dicke von 350 μ.

Silikatglas	Bruch bei P = 70 gr*
Silikatglas mit Überzug	Bruch bei P = 87 gr*
Silikatglas auf Plexiglas geklebt	Bruch bei P = 230 gr*

An dicken Silikatglasscheiben (0,7 mm) wurde beobachtet, daß man gegenüber Glas allein eine Steigerung der Bruchfestigkeit erhielt bei folgenden Kombinationen (aufgezählt in der Reihenfolge größerer Bruchfestigkeit):

Kleben auf Plexiglas, Kleben auf Plexiglas unter Druck, Kleben auf Plexiglas auch ohne Druck, aber unter vorangehender Reinigung nach einem besonderen Verfahren. In Abb. 14 sind die drei Meßpunkte über demjenigen für Silikatglas allein bei d = 0,7 mm eingetragen.

§ 6. Vorteilhafte Dicke und Kombination der Scheiben

Um praktisch brauchbare, d. h. genügend kurze Brennweiten zu erhalten, müssen die dünneren Scheiben (300-200 μ) verwendet werden. Bei diesen ist das Kleben auf Plexiglas für die Mittel des Laboratoriums sehr schwierig und läßt sich ohne spezielle technische Methoden kaum mit dem für ein gutes Haften notwendigen Druck durchführen. Die dünnen Scheiben brechen bei einem solchen Versuch des Aufklebens schon in ihrer Form von Versuchsstreifen. Ganze Linsenschalen von so geringen Dicken aufzukleben gelang uns nie einwandfrei. Aus diesem Grund wurde der Überzug vorgezogen.

Beim Überzug sind zur Erreichung der gleichen Durchbiegung kleinere Drucke notwendig als bei geklebten Gläsern, ein weiterer Umstand der für die Verwendung überzogener Gläser in den Fällen spricht, wo Linsen ohne Kautschukdichtungen zusammengesetzt werden und dementsprechend für zu hohen Flüssigkeitsdruck nicht mehr dicht halten.

§ 7. Einfluß der Kombination auf die Durchbiegung

Die Berechnung des Einflusses eines Cellulose-Überzuges auf Silikatglas, oder des Aufklebens von Silikatglas auf Plexiglas wurde hier nur für Glasstreifen, nicht für Scheiben durchgeführt. Experimentell zeigte sich eine gute Übereinstimmung der elastischen Linie von Streifen und Scheiben, so daß sich die Art der Beeinflussung durch den Überzug oder die Kombination schon an den Streifen übersehen läßt.

Es handelt sich hier um folgende Fragen:

1. Welches ist die Gestalt der elastischen Linie eines Balkens, der beidseitig mit einer Schicht überzogen ist, die keine Biegungssteifigkeit besitzt (Abb. 14a).

2. Welches ist die elastische Linie und die Durchbiegung eines einfachen Balkens, dessen Elastizitätsmodul in einer zur neutralen Schicht parallelen Ebene einen Sprung erleidet? Der Balken ist zusammengesetzt aus zwei Balken mit verschiedenen Materialkonstanten (Abb. 14b).

Zur Berechnung des Einflusses des Überzuges berücksichtigen wir nur die untere Schicht. Die obere kann vernachlässigt werden, da sie wegen ihrer geringen Dicke (in Bezug auf den Balken im Mittel 3 %) nicht als fester Körper mit Biegungssteifigkeit behandelt werden muß.

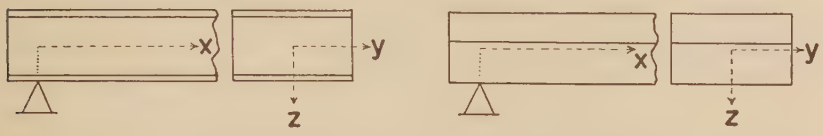

Abb. 14. Die beiden uns interessierenden Fälle

Die Überzüge sind vielleicht mit Kautschukmembranen zu vergleichen, die nur bei Zug eine tangentielle Kraft erzeugen. Um diese Kraft zu berechnen, brauchen wir die Verlängerung der Oberfläche des Balkens bei der Durchbiegung.

Ist ρ der Krümmungsradius der neutralen Faserschicht und ds die Länge eines Balkenelementes, so ist die Verlängerung einer in der Entfernung λ von der neutralen Schicht liegenden Faser der ursprünglichen Länge ds, gegeben durch

$$\Delta\, d\,s = \frac{\lambda}{\rho}\, d\,s$$

Die Dicke des Balkens ist $d = 2e$, also folgt für die Oberfläche

$$\Delta\, d\,s = \frac{e}{\rho}\sqrt{1 + z'^2}\, d\,x$$

Es ist aber

$$\frac{1}{\rho} = \frac{z''}{\sqrt{(1 + z'^2)^3}}$$

Dadurch wird die Verlängerung der Oberfläche, mit der zur Ableitung der elastischen Linie eines einfachen Balkens bei kleiner Durchbiegung üblichen Vernachlässigung $z'^2 = o$:

$$\Delta\, d\,s = e\,z''\, d\,x$$

was das Gleichsetzen von ds und dx bedeutet.

Wegen der in der Festigkeitslehre bekannten Beziehung

$$z'' = -\frac{M}{E\,J}$$

wo J (= J_y) das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes und M das Moment der äußeren Kräfte (einschließlich der Auflagereaktionen) im Querschnitt x ist. In unserem Fall der Einzellast Q in der Mitte:

$$M = \frac{Q}{2} x$$

Die gesuchte Verlängerung wird dadurch:

$$\left| \Delta s \right| = e \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Q\,x}{2\,E\,J}\,dx = \frac{Q}{4\,E\,J}\,e\,l^2$$

Ist E_0 der Elastizitätsmodul des Überzuges und i dessen Dicke, so bewirkt die Dehnung um Δs eine tangentielle Kraft, die sich nach Hook berechnen läßt zu

$$K = \frac{E_0}{E}\,\frac{Q}{4\,J}\,e\,b\,i\,l$$

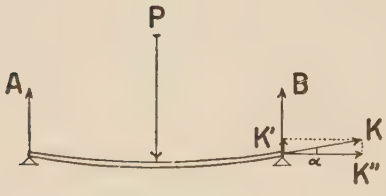

Abb. 15.

Diese tangentielle Zusatzkraft bewirkt, daß für die gleiche Durchbiegung wie bei demselben Balken ohne Überzug eine Kraft $P > Q$ erforderlich ist. Ohne Überzug sind die Auflagekräfte: $A = B = Q/2$. Durch den Überzug kommt noch die Kraft K' hinzu (Abb. 15):

$$K' = K \sin\alpha \approx K\,z' \Big|_{x=0} = K\,\frac{Q}{4\,E\,J}\,\frac{l^2}{4}$$

Also ist P (= 2A + 2K' = Q + 2K'), durch Einsetzen des Wertes von J:

$$\boxed{P = Q + Q^2\,\frac{9}{128}\,\frac{E_0}{E^2}\,\frac{l^3\,i}{c^5\,b}}$$

In Abb. 16 ist der quadratische Gang der Differenz P — Q dargestellt. Es wurde dazu graphisch die Belastung für die gleiche Durchbiegung in den beiden Fällen von Silikatglas mit und ohne Überzug ermittelt.

Für die *verteilte Belastung* von q gr*/cm ist die Verlängerung der Oberflächenschicht

$$\Delta s = \frac{e\,q\,l^3}{12\,E\,J}$$

wie sich aus der dem vorhergehenden Fall analogen Berechnung ergibt.

Die durch den Überzug erzeugte tangentielle Zusatzkraft K folgt wieder aus dem Hook'schen Gesetz.

$$K = \frac{E_o}{E} \frac{e\, i\, b\, l^2\, q}{12\, J}$$

Wie oben, ist auch hier mit dieser Zusatzkraft eine größere Flächenbelastung p notwendig, um dieselbe Durchbiegung zu erhalten.

$$p = q + \frac{E_0}{64} \left(\frac{q}{E}\right)^2 \frac{l^4}{e^5} \frac{i}{b}$$

Auch hier ergibt sich die quadratische Abhängigkeit der Differenz p — q als Funktion von q.

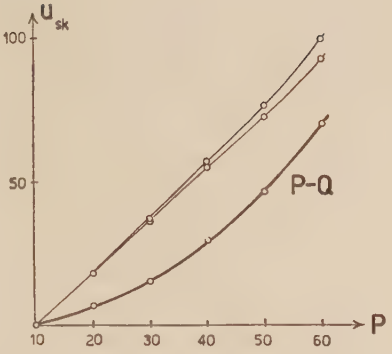

Abb. 16. Maximale Durchbiegung in Skalenteilen als Funktion der Belastung.

Von den dünneren Kurven gilt die obere für Silikatglas allein, die untere für überzogenes Silikatglas. Die dicke Kurve gibt die Differenz an, bei gleicher Durchbiegung.

Wegen der in beiden Fällen vorausgesetzten vernachlässigbaren Biegungssteifigkeit des Überzuges wird die Form der elastischen Linie durch ihn nicht beeinflußt.

In dieser und in der folgenden Berechnung wurde zuerst übersichtshalber der Fall der Einzellast in der Mitte behandelt. Dieser Fall ist der bei der Elastizitätsmessung nach Abschn. V § 3 vorliegende. Die verteilte Belastung nähert sich dem Belastungszustand der Scheiben in der Linse, auf die ein Flüssigkeitsdruck wirkt.

Klebt man zwei Platten aus verschiedenem Material aufeinander, geht bei der Durchbiegung die neutrale Faser nicht mehr durch den Querschnittsschwerpunkt, sondern sie wird von diesem in einem gewissen Abstand ζ verlaufen. Dieser Abstand soll nun bestimmt werden.

E_1 und E_2 seien die Elastizitätskonstanten der beiden Platten, d_1 und d_2 die entsprechenden Dicken. Ist ε_x die spezifische Dehnung und σ_x die spezifische Spannung in der x-Richtung, so ist das Hook'sche Gesetz :

$$\sigma_x = E\, \varepsilon_x$$

Für die Rechnung seien zwei Annahmen getroffen :

1. Die Kittung sei so fest, daß an der Kittfläche kein Gleiten eintritt.

2. Bei der Durchbiegung bleibe der Querschnitt eben (Übliche Hypothese der Festigkeitslehre).

Nach diesen Voraussetzungen ist (siehe Abb. 17):

$$\varepsilon = c\,z$$

wenn man die neutrale Faserschicht als xy-Ebene wählt.

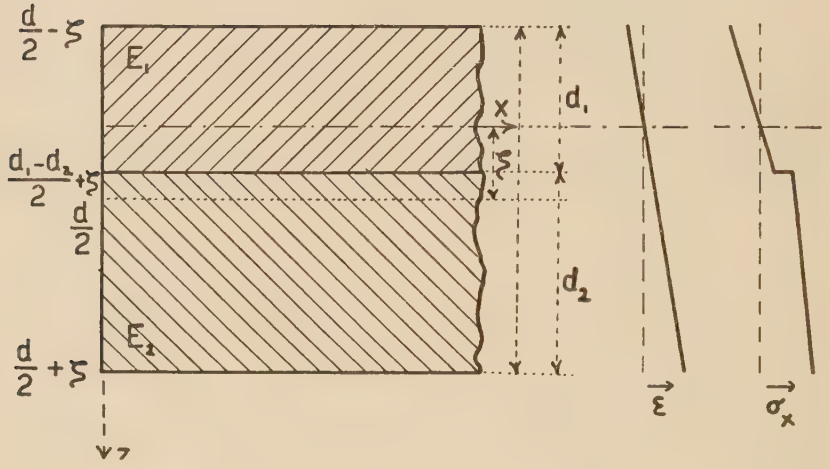

Abb. 17.

Das Moment der oberen σ-Kräfte in Bezug auf die neutrale Faser ist (Abb. 17):

$$M_o = \int_0^{d/2 - \zeta} \sigma_x\, z\, d\, z = \frac{c}{3} E_1 \left(\frac{d}{2} - \zeta\right)^3$$

Moment der unteren σ-Kräfte:

$$M_u = c\, E_1 \int_0^{\frac{d_1 - d_2}{2} + \zeta} z^2\, dz + c\, E_2 \int_{\frac{d_1 - d_2}{2} + \zeta}^{d/2 + \zeta} z^2\, d\, z =$$

$$= \frac{c}{3} E_1 \left(\frac{d_1 - d_2}{2} + \zeta\right)^3 + \frac{c}{3} E_2 \left[\left(\frac{d}{2} + \zeta\right)^3 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2} + \zeta\right)^3\right]$$

Die Gleichgewichtsbedingung $M_o = M_u$ liefert die Gleichung:

$$2\,E_1\,\zeta^3 - \frac{3}{2}\,d_2\,(E_1 - E_2)\,\zeta^2 + 3\left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}\,E_1 + d_1\,d_2\,E_2\right)\zeta -$$

$$- \frac{d_2}{4}\,(3\,d_1^2 + d_2^2)\,(E_1 - E_2) = 0$$

Diese Gleichung ist zu kompliziert für eine allgemeine Auflösung. In interessierenden Fällen werden vor der Auflösung nach ζ die Zahlenwerte der Materialkonstanten und der Dicken eingesetzt.

Die Lösung obiger Gleichung gibt an, in welchem der beiden Medien sich die neutrale Schicht befindet. Aus der Definition der elastischen Linie folgt, daß sich der Balken so durchbiegt, wie wenn er ganz aus dem Material bestände, in dem die neutrale Schicht verläuft. Die Durchbiegung ist die eines Ersatzbalkens, dessen Dicke zweimal diejenige jenes Materials zwischen der freien Oberfläche und der neutralen Faser (Abb. 18) beträgt.

Der linke Teil der Abbildung 18 zeigt den Ersatzbalken im Falle der neutralen Schicht im oberen Material, der rechte Teil den Ersatzbalken, wenn die neutrale Schicht im unteren Material liegt. Die Dicke des Ersatzbalkens wollen wir *reduzierte Dicke* nennen.

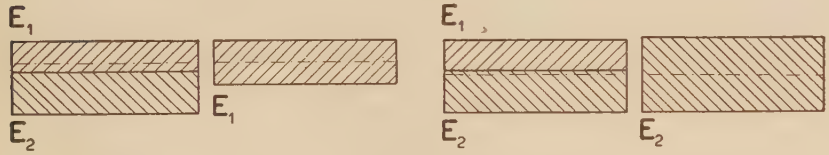

Abb. 18.

Beispiel. Glas in der Dicke von 4.10^{-2} cm wurde auf Plexiglas von 5.10^{-2} cm geklebt. Es ist

$d_1 = 4.10^{-2}$ cm $d_2 = 5.10^{-2}$ cm

$E_1 = 7{,}5.10^8$ gr*/cm² $E_2 = 0{,}28.10^8$ gr*/cm²

Führt man diese Werte in die Gleichung für ζ ein, erhält man

$$\zeta = 1{,}5311.10^{-2} \text{ cm}$$

Die reduzierte Dicke ist dann (effektive Dicke 0,9 mm)

$$d = 5{,}94.10^{-2} \text{ cm}$$

Ein Balken der Länge 8,5 cm und Breite 1 cm biegt sich bei dieser Dicke (mit dem Elastizitätsmodul von Silikatglas, denn darin verläuft die neutrale Schicht) in der Mitte um:

$$z_{max} = 0{,}49 \text{ mm}$$

bei Belastung von 50 gr* in der Mitte. Dieser Wert ist im Vergleich zum experimentellen Ergebnis

$$z_{max} = 0{,}6 \text{ mm}$$

befriedigend, denn die Abweichung nach zu großer Durchbiegung im Experiment läßt sich durch die unvollkommene Kittung erklären. Bei der Durchbiegung mit ideal vorausgesetzter Kittung würde bei eben bleibendem Querschnitt ein Sprung der Spannung an der Kittfläche auftreten. Die Kittung gleitet aber und versucht diesen Sprung auszugleichen auf Kosten der Hypothese des eben bleibenden Querschnittes.

Ist zwischen den beiden Materialien vollkommenes Gleiten möglich, so berechnet sich die Durchbiegung wie folgt: Der Träger mit Elastizitätsmodul E_1 sei der obere. Er biegt sich unter der Last P_1 nach der Gleichung

$$z_1 = \frac{P_1 x}{4 E_1 J_1}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right]$$

Der untere Träger wird dadurch so gebogen, daß seine elastische Linie dieselbe Form erhält. Dies entspricht für ihn einer Belastung durch die Kraft P_2

$$z_2 = \frac{P_2 x}{4 E_2 J_2}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right]$$

Aus der Identität der elastischen Linien und

$$P = P_1 + P_2$$

da die äußere Kraft, die die Durchbiegung beider Träger verursacht gleich der Summe der beiden anderen sein muß,
folgt für die Balkenmitte $(x = l/2)$:

$$z_{max} = \frac{P}{1 + \frac{E_2 d_2^3}{E_1 d_1^3}}\left(\frac{l}{d_1}\right)^3 \frac{1}{4 E_1 b}$$

In unserem Beispiel gibt dies

$$z_{max} = 1{,}49 \text{ mm}$$

Das experimentelle Resultat liegt also weit näher dem theoretischen für vollkommene Kittung als für vollständiges Gleiten.

§ 8. Folgen für die Korrektur der Aberration

Die Verwendung kombinierter Schalen erlaubt es, innerhalb gewisser Grenzen in gegebenen Druckintervallen die gewünschte Größe der Durchbiegung zu erzielen. Dies ist wichtig bei Linsen deren Schalen zur Korrektur der sphärischen Aberration verschieden dick sind (Kap. X § 4).

§ 9. Weiteres Mittel zur Erhöhung des Elastizitätsbereichs

Es wurden Versuche unternommen, die Linse mit Gelatine zu füllen. Durch diese Füllung werden die Grenzen des nutzbaren Elastizitätsbereiches erweitert, die Dichtungsschwierigkeiten verringern sich, und die Bedingung, das Füllvolumen konstant zu halten wird leichter erfüllt.

Das Einfüllen der Gelatine geschah nach Verflüssigung derselben durch Wärmen. Die gefüllte Linse wurde in einem Ofen etwa eine Stunde lang bei mäßiger Temperatur (um 40° C) gelassen, um die beim Füllen entstandenen Schlieren zu beseitigen. Nachher ließ man die Temperatur des Ofens langsam sinken. Bei dieser Art der Füllung, die sich gut bewährte, mußte beachtet werden, daß bei Plexiglaslinsen die Einfülltemperatur und die Ofentemperatur nicht zu hoch waren, was eine Deformation der dann leicht fließenden Scheiben zur Folge gehabt hätte. Bei 80° C läßt sich das für uns verfügbare Plexiglas leicht plastisch verformen.

Die zahlreichen an den Linsen durchgeführten Versuche, die oft auszuwechselnden Gläser und Schwingringe, erforderten die Möglichkeit die Linsenfassungen leicht auseinandernehmen und zusammensetzen zu können. Zur Vereinfachung dieser Arbeit und um nicht wiederholt Zeit zu verlieren durch das etwas umständliche Einfüllen von Gelatine, wurde diese Füllung nur selten benützt, denn das optische Verhalten der Gelatine-Linsen ist identisch mit demjenigen der Glycerin-Linsen. Obwohl also die Gelatine-Füllung mechanisch die geeignetere ist, wurde für die Versuche die experimentell einfachere Glycerin-Füllung vorgezogen.

VI. Elastizität von Glas

§ 1. Hysteresis und elastische Eigenschaften von Silikatglas

Die Angaben verschiedener Autoren über die elastischen Eigenschaften von Glas widersprechen sich so sehr, daß es nicht möglich ist aus der Literatur zu entnehmen, ob Silikatglas fließt oder nicht.

Nach Eitel-Pirani-Scheel [1] ist bei Glas bei mechanischer Beanspruchung Nachwirkung beobachtet worden.

In einer umfassenden Zusammenstellung der Eigenschaften von Gläsern durch Morey [2] lesen wir über Elastizität und Fließeigenschaften:

« Glas fließt bei gewöhnlicher Temperatur. Glas ist elastisch, wenn die deformierende Kraft nicht zu groß ist und nicht zu lange wirkt, allerdings bei nicht zu hoher Temperatur. Bei Glas beobachtet man bei Belastung eine Durchbiegung bis zu einer bestimmten Grenze, dann folgt keine weitere Deformation (bei bleibender Belastung). Dies ist das Resultat einer 7jährigen Beobachtung von Lord Rayleigh. Glasstäbe und Röhren von reifem Alter biegen sich nicht unter dem Eigengewicht. »

Leider folgt im Buch diesen Feststellungen der dem vorherigen Text widersprechende Satz: « Trotzdem fließt Glas. » « Prismen und Linsen, die bei Raumtemperatur aus gespanntem Glas hergestellt werden, zeigen später Deformationen, wenn die Spannung eine kleine Grenze überschreitet. Ursache ist die Änderung der Oberflächenspannung. Solche Deformationen kann man in schlecht gekühlten astronomischen Spiegeln beobachten, was beweist, daß Glas schon bei normalen Temperaturen fließt, also eine viskose Flüssigkeit ist, die keine Dauerbelastung verträgt. » Und nochmals folgt ein kurzes: « Andere sagen das Gegenteil. »

[1] W. Eitel, P. Pirani, K. Scheel: Glastechnische Tabellen; physikal. und chem. Konstanten. Berlin 1932.

[2] G. W. Morey: The properties of Glass. American Chemical Society Monograph Series 77. New York 1938.

Abhängigkeit der Nachwirkung von der Zusammensetzung der Gläser: « Die größte Nachwirkung haben Mehrkomponentengläser (Kali-Natrium-Gläser wie Na_2CO_3 und K_2CO_3). Ist nur eines dieser Metalle vorhanden, wird die Nachwirkung am geringsten. »

« An Glasfäden fand man die Gesetzmäßigkeit:

$$\text{Verlängerung} = A + B \log t \qquad (t = \text{Zeit})$$

die sich nur an alten Fasern reproduzieren läßt. Bei Wegnahme der Belastung erholt sich das Material rascher, wenn es Schwingungen ausführt (Spencer). »

Bemerkenswert ist endlich eine Beziehung zwischen elastischen und thermischen Eigenschaften: « Ein thermisch gutes Glas ist auch elastisch gut. » Es erwies sich aber unmöglich, während des Krieges geeignete Platten aus thermisch gutem Glas für unsere Versuche zu erhalten.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß Glas möglicherweise doch fließt, aber in viel geringerem Maße als Plexiglas [1]. Für die Laboratoriumsversuche, bei denen die Belastungen immer nur relativ kurze Zeit (bis höchstens eine halbe Stunde) dauern, kann vom Fließen abgesehen werden. Für Linsen, die längere Zeit unter Druck stehen, ist aber die Zeitabhängigkeit zu beachten, und mit der in der Arbeit III für plastisches Material gestellten Bedingung Volumen = konst. zu arbeiten.

§ 2. Elastizität und Überzug

Die eigenen Messungen der Glaselastizität wurden hauptsächlich zur Untersuchung des Einflusses der Überzüge und der Kombination mit Plexiglas durchgeführt. Es interessierte aber auch, ob der Elastizitätsmodul von Silikatglas eine feste Materialkonstante sei, oder ob er vielleicht auch von der Dicke des Prüflings abhängen könnte. Diese Frage konnte aber nicht entschieden werden, da wegen der Abweichungen der zur Verfügung stehenden Glasplatten von der Planparallelität die Meßwerte zu sehr schwankten. Es konnte deswegen von uns nicht festgestellt werden, ob die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Dicke, wie sie auf Abb. 12 eingezeichnet ist, der Wirklichkeit ent-

[1] Nach E. Jenckel (Z. Elektrochemie **45**, 202, 1939) ist bei Silikatglas sowohl elastische Deformation als auch plastische Nachwirkung zu beobachten.

spricht oder nur daher rührt, daß gleiche Unregelmäßigkeiten der Dicke sich bei dünneren Gläsern stärker auswirken und für weitere Versuche kein Material zur Verfügung stand (siehe Kap. V § 4 u. VIII § 7).

§ 3. Hysteresis von Plexiglas und Silikatglas

Die Linsen mit dem uns jetzt zur Verfügung stehenden Plexiglas zeigen eine starke Hysteresis (Abb. 19). Nach dem Druckabfall sind die Brennweiten länger als bei den gleichen Beträgen des Druckes während des Aufstiegs. Der Effekt ist zu groß, um sich allein durch das Gleiten in den Fassungen erklären zu lassen. Die Hysteresis findet ihre Ursache in den Nachwirkungen und der plastischen Verformung des Materials der Linsenschalen [1].

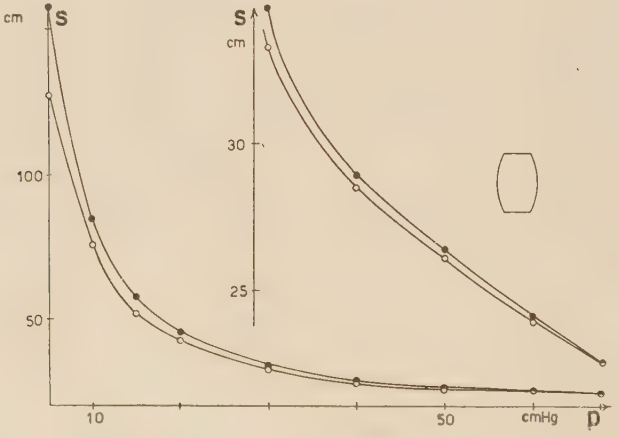

Abb. 19. Hysteresis gemessen an der Brennweite der zweiten Linsenzonen bei Schalen aus Plexiglas. Rechts ist der untere Teil der Kurven in vergrößertem Ordinatenmaßstab gezeichnet. d = 2 mm, ∅ = 100 mm, ∅s = 92 mm. • = steigender Druck, o = fallender Druck.

Die Hysteresis war den Erwartungen entsprechend bei kleinem Durchmesser der Fassungsringe geringer. Dicke Platten aus Plexiglas haben kleinere Hysteresis als dünne. Dies kommt daher, daß die ela-

[1] I. S. 274.

stischen Nachwirkungen der ersten sich erst nach längerer Zeit auswirken und im Experiment der höchste verwendete Druck von 65 cm Hg nur etwa $^1/_2$ Minute auf die Linsenfüllung wirkte. Ein länger dauernder Druck würde auch ein stärkeres Gleiten in der Fassung bewirken und wurde aus diesem Grund vermieden. Zweifellos würde die Hysteresisschleife breiter.

Die Abb. 20 zeigt dieselbe Messung (unter gleichen Bedingungen, auch in der Dauer der Druckeinwirkung), jedoch an Silikatglas. Von einer Hysteresis läßt sich im Bereiche der Meßgenauigkeit nichts sehen. Der höchste Betrag des Druckes war kleiner als bei Plexiglas, er stieg nur auf den für Silikatglas erträglichen Wert von 12 cm Hg.

Abb. 20. Hysteresis (II Linsenzone) bei Silikatglas.
d = 0,7 mm, ∅ = 100 mm, $\varnothing_s$ = 92 mm.
• = steigender Druck, o = fallender Druck.

Also: Plastische Verformung bei Plexiglas und fehlende (oder sehr geringe) Hysteresis von Silikatglas. Diese beiden experimentellen Resultate berechtigen zur Verwendung von Silikatglas, und außerdem erlauben sie uns an Stelle der Bedingung Volumen = konst. die experimentell etwas einfachere Druckkonstanz zu setzen (siehe auch Abschn. III § 1).

VII. Verkürzung der Brennweiten

§ 1. Notwendigkeit einer Verkürzung der Brennweiten

Die Brennweite der Linse mit Silikatglasscheiben ist beschränkt durch die geringe bei dem uns zur Verfügung stehenden Glas mögliche Durchbiegung. Die Durchbiegung bei Bruch steigt bei geringer Dicke der Scheiben (Abb. 13), so daß die Schwierigkeit, hinreichend dünne Scheiben zu verschaffen, auch verhinderte, bei einer einfachen dynamischen Linse hinreichend kleine Brennweiten zu erzielen. Diese konnten nicht unter etwa 2 Meter gebracht werden.

Um mit dem Wetthauergerät genauere Messungen durchführen zu können, und auch in Hinsicht auf die Anwendungen der dynamischen Linse (z. B. als Projektionslinse) müssen genügend kurze Brennweiten erreicht werden (siehe auch Kap. II § 2). Bei der Brennweite von 2 Metern wurden die Linsenschalen aus dem uns zur Verfügung stehenden Silikatglas bis hart an die Bruchgrenze beansprucht.

Um auf kleinere Werte der Brennweite zu gelangen, wurden die nachfolgend beschriebenen Wege eingeschlagen.

§ 2. Füllflüssigkeit

Der Brechungsindex der Füllflüssigkeit (Glycerin) wurde durch Zusatz von Ammonrhodanid (NH_4CNS) erhöht. Die Messungen der Brechkraft und der Dispersion verschiedener Konzentrationen dieser Lösung ergaben folgende Werte:

Glycerin rein (die beste uns zur Verfügung stehende Qualität, welche wahrscheinlich noch viel Wasser enthält):

$n_D = 1{,}45857$ ($n_{H\alpha} = 1{,}4536$ $n_{H\beta} = 1{,}46037$)
$\nu = 67{,}801$ (Abbé'sche Zahl

Mit Zusatz von 10 % NH_4CNS:	$n_D = 1{,}46742$	$\nu =$	55,5
Mit Zusatz von 20 % »	1,47907		50,0
Mit Zusatz von 30 % »	1,48549		43,5

Bei Zunahme der Konzentration von 20 % auf 30 % entsteht kein wesentlicher Gewinn an Brechkraft. Außerdem sind 30 % schon ziemlich schwer in Glycerin löslich, und die Lösung ist trüb und stark gelb.

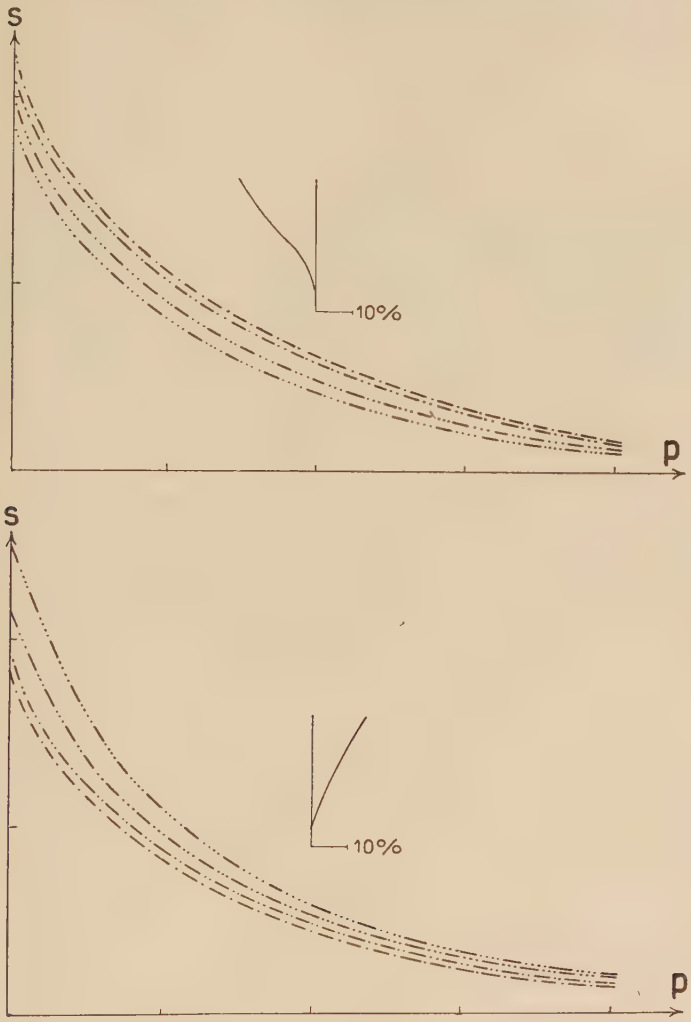

Abb. 21. Prinzipielle Brennweitenänderung bei sphärischer (oben) und antisphärischer Aberration (unten).

—•— Brennweite der innersten Zone : 0,5 cm von der Linsenmitte ; —••••— äußerste Zone : 2 cm von der Linsenmitte.

(Zu Kap. VIII.)

Es ist deswegen vorzuziehen, die Konzentration von 20 % zu benützen. Ammonrhodanid ist ein höchst empfindliches Reagenz für den Nachweis von Eisen und greift deswegen das Messing der Linsenfassung an, was auch eine Verdunkelung der Lösung zur Folge hat. Dies sind zwei weitere Gründe für die Wahl der kleineren Konzentration von 20 %.

§ 3. Doppellinse

Da der Zusatz von Ammonrhodanid noch nicht die gewünschte Verkürzung der Brennweite ergab, wurde eine zweite Linse konstruiert mit denselben Dimensionen der schon vorhandenen Einkammerlinse. Die beiden Linsenfassungen lassen sich so gegen einen mit Kautschukdichtungen versehenen, metallenen Zwischenring mittels Schrauben andrücken, daß zwischen ihnen ein abgedichteter Luftraum entsteht (siehe Abb. 5). In diesem kann ein Gegendruck angebracht werden, dessen Zweckmäßigkeit weiter unten erörtert wird (Kap. X § 6 u. § 7).

Die Zwischenkammer kann auch mit einer Flüssigkeit gefüllt werden, so daß eine Dreikammerlinse entsteht. Die drei Kammern können jede auf einen anderen Druck gebracht werden, denn sie haben getrennte Anschlüsse an die Druckapparatur.

Die vier Scheiben der Doppellinse können in verschiedenen Durchmessern und Dicken eingesetzt werden, so daß sich viele Anwendungsmöglichkeiten für dieses Linsenmodell ergeben.

VIII. Krümmung und Aberration

§ 1. Vorkrümmung

In Kap. III § 1 (Vorkrümmung des Randes) wurde schon erwähnt, wie durch geeignete feste Vorkrümmung mit den Einspannringen der sphärischen Aberration entgegengewirkt wurde [1]. Bei kleinerer Vorkrümmung entsprachen die Resultate der Erwartung, die Korrektur war jedoch ungenügend. Erhöhung der Vorkrümmung führte nicht zum Ziel (siehe Abb. 6).

§ 2. Schwingringe

Bei Versuchen mit Silikatglasscheiben wurden die Ringe für die Vorkrümmung durch Schwingringe ersetzt: siehe Kap. III § 2, denn da für Glas eine Randvorkrümmung doch nicht mehr möglich ist, sollten die Verhältnisse denjenigen der frei aufliegenden Platte nähergeführt werden.

§ 3. Dicke der Glasscheiben

Wie das Experiment sowohl mit Silikatglas als auch mit Plexiglas zeigte, geben dünne Scheiben Linsen mit geringerer antisphärischer Aberration als dickere Scheiben. Die Überkorrektur der sphärischen Aberration nimmt also bei abnehmender Dicke der Linsenschalen ab. Bei Plexiglas wölben sich genügend geringe Dicken (etwa 0,5 mm) zu einer Linse mit sphärischer Aberration. Auch sehr dünne Silikatglasscheiben (von 0,2 mm und weniger) konnten sphärisch gemacht werden. Leider waren so dünne Gläser nur anfangs und in sehr beschränkter Anzahl erhältlich (Krieg !)

Die in den letzten zwei Jahren allein noch zur Verfügung stehenden Schalen ermöglichten es nur, Linsen mit antisphärischer Aberration zu

[1] I. S. 279.

erhalten. Die hauptsächliche Schwierigkeit, auf die die experimentelle Ermittlung einer Korrektur stieß, war deswegen durch die Zeitumstände bedingt, die es uns nicht erlaubten, genügend dünne Silikatglasscheiben zu beschaffen.

§ 4. Brennweiten verschiedener Zonen

Linsen mit Schalen aus Plexiglas oder genügend dünnem Silikatglas (Versuche mit Kautschukdichtungen) sind bei geringer Durchbiegung überkorrigiert (also antisphärisch) und gehen bei größerer Durchbiegung zu sphärischer Aberration über. Dies heißt also, daß im üblichen Diagramm mit dem Flüssigkeitsdruck als Abszisse und den Zonenbrennweiten als Ordinate die Kurven der Brennweitenänderung zum Beispiel der beiden innersten Zonen (0,5 und 1,0 cm vom Linsenmittelpunkt) sich schneiden (Abb. 22).

Bei dem diesem Schnittpunkt entsprechenden Druck ist somit die Aberration, wenigstens für diese Zonen, korrigiert. In einigen Fällen schnitten sich die drei inneren Zonenbrennweiten (0,5 ; 1,0 ; 1,5 cm von der Linsenachse) in demselben Punkt.

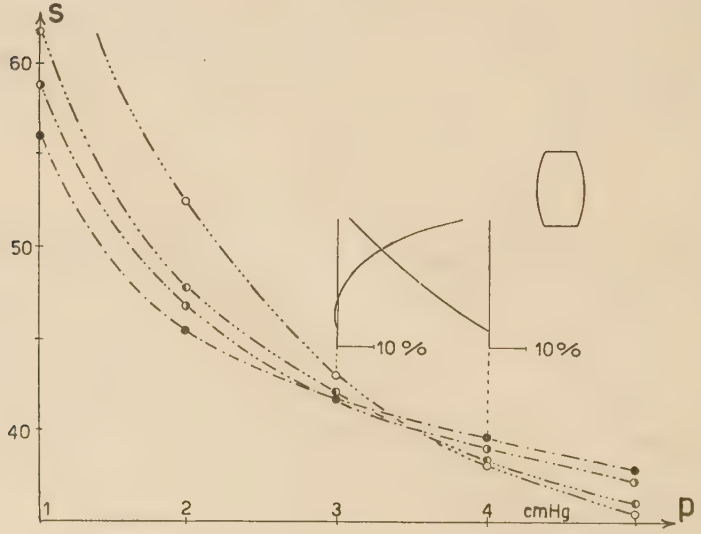

Abb. 22. Übergang von der antisphärischen zur sphärischen Aberration bei Druckzunahme. Plexiglas d = 0,5 mm, ∅ = 65 mm.

Diese Korrektur der Aberration ist nur für eine Brennweite gültig. Bei höherem Druck ist die Linse sphärisch, bei geringerem antisphärisch. Wie man von der einzigen korrigierten Brennweite zu einem korrigierten Intervall der Brennweitenvariation gelangt, wird in den Kapiteln IX und X dargestellt werden.

Der Weg der Korrektur durch den stetigen Übergang von der einen Aberrationsart zur entgegengesetzten (bei Druckänderung) war vorläufig nur bei Anwesenheit von Kautschukringen möglich, denn ohne diese Dichtungen zeigten alle Silikatglaslinsen bei jedem Druck nur antisphärische Aberration, so daß der Schnittpunkt der Zonenbrennweiten fehlte. Der Grund zu diesem Verhalten lag am schon beschriebenen Umstand, daß festgeklebte Scheiben nicht mehr aus den Fassungsringen herausgleiten können. Indessen sind solche Kreuzungspunkte zu erwarten, wenn wieder genügend dünnes Silikatglas verwendet werden kann, dessen Durchbiegung dann für ein sphärisches Verhalten hinreichend wäre.

§ 5. Schalendicke und Schalenradius

Unter sonst gleichen Bedingungen ist bei Silikatglaslinsen die antisphärische Aberration geringer, bei dünnen Plexiglaslinsen (etwa 0,5 mm und weniger) die sphärische Aberration stärker, je dünner die Linsenschalen sind (Radius konstant).

Bei gleicher Dicke und gleichen Versuchsbedingungen ist die antisphärische Aberration von Silikatglaslinsen geringer, die sphärische Aberration von Plexiglaslinsen stärker, je größer der Linsenradius gewählt wird (Abb. 23 u. 24).

Zusammengefaßt: Die Abnahme der Dicke (bei konstantem Radius) wirkt in Bezug auf die Aberration im gleichen Sinne wie die Zunahme des Radius (bei konstanter Dicke). In beiden Fällen wird die Aberration mehr sphärisch.

Diese experimentellen Ergebnisse sind für die Korrektur brauchbar.

§ 6. Pressung der Einspannringe

Über die durch das leicht mögliche Gleiten der Scheiben aus den Fassungen verursachte geringere Krümmung bei schwacher Randpressung siehe Kap. III § 3. Das Resultat war dort: Möglichst hohe Randpressung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Druck und Krümmung.

§ 7. Deformationen durch Unregelmäßigkeit in der Dicke

Beim Versuch, eine Linse, die auf der Prüfbank (d. h. also für einen Durchmesser) gut korrigiert war, als Projektionslinse zu benutzen, wies das Bild beträchtliche Zonenfehler auf. Die Oberfläche mußte große Unregelmäßigkeiten aufweisen. Hingegen gab eine Linse aus Plexiglas trotz größerer Aberration ein besseres Projektionsbild.

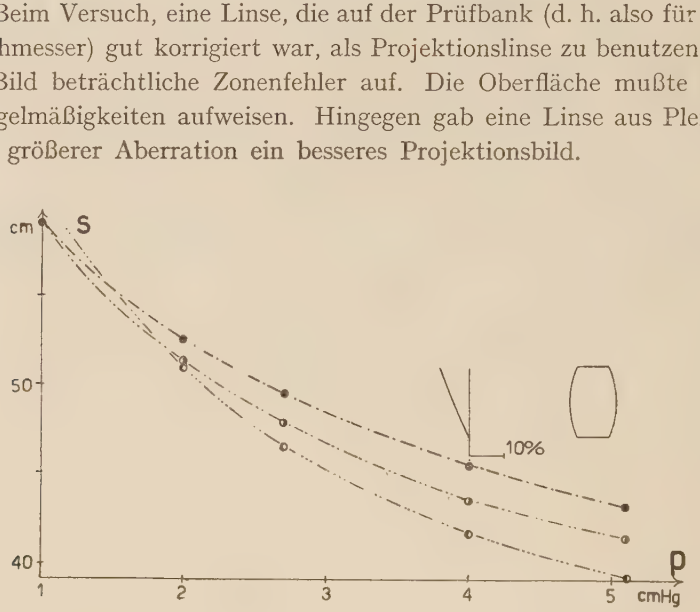

Abb. 23. Dünnes Plexiglas gibt Linsen mit sphärischer Aberration. d = 0,5 mm, ∅ = 85 mm, $\varnothing_s$ = 73 mm.

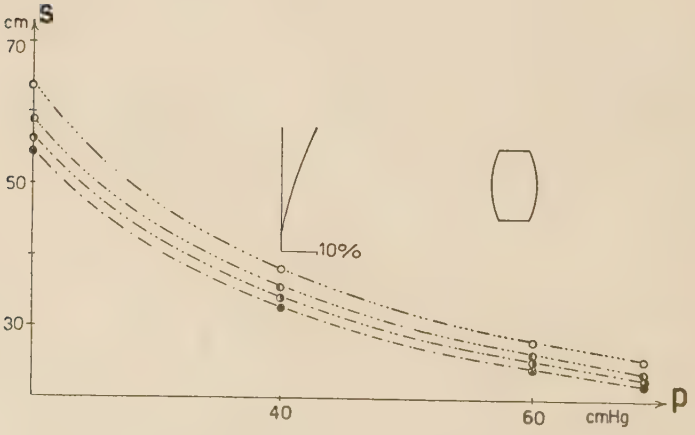

Abb. 24. Die Linse mit dickem Plexiglas hat antisphärische Aberration. d = 2 mm, ∅ = 100 mm, $\varnothing_s$ = 73 mm.

Näheres Untersuchen ergab, daß die Schalen letzterer Linse aus einer Plexiglasplatte mit homogener Dicke geschnitten worden war.

Die beiden Schalen der Silikatglaslinse hatten verschiedene Dicke zur Korrektur der Aberration (siehe weiter unten, Kap. X). Für die dickere (0,7 mm) Schale war eine Glasscheibe benützt worden, wie wir sie von der Glasfabrik erhalten hatten, ohne jede Vorbehandlung. Die dünnere Scheibe hingegen stammte aus einer Serie Gläser, die wir in einer optischen Werkstätte aus den dickeren Scheiben für uns schleifen ließen (0,3 mm). Es war also denkbar, daß die Zonenfehler von der Unregelmäßigkeit der dicken Scheibe herrühren könnten. Um diese Annahme zu prüfen, wurde die dickere Scheibe durch eine geschliffene Schale ersetzt, die Bilder blieben aber gleich schlecht. Die Unregelmäßigkeit mußte folglich selbst in den geschliffenen Scheiben beträchtlich sein.

Die direkte Messung der Scheibendicke an geschliffenen Gläsern ergab folgende Resultate (die Dicke wurde zuerst an der mit Zelluloselack überzogenen Scheibe und dann nochmals nach Entfernung des Überzuges gemessen):

Scheibe mit Überzug: 28 verschiedene Werte zwischen 308 μ und 337 μ.

Dieselbe Scheibe ohne Überzug (dieser wurde mit Amylacetat aufgelöst): 20 verschiedene Werte zwischen 308 μ und 318 μ.

Eine andere Scheibe ohne Überzug: 20 verschiedene Werte zwischen 778 μ und 793 μ.

Die verschiedenen Meßwerte waren regellos über die Fläche verteilt; es ließ sich keine Gesetzmäßigkeit finden, wie etwa Abnehmen der Dicke gegen den Rand oder dergleichen. Da die Schwankungen bei verschiedenen Dicken etwa gleich groß sind, ist der prozentuale Fehler für dünne Gläser beträchtlicher. In den erwähnten Beispielen beträgt dieser Fehler (ohne Überzug) für das dicke Glas 1,88 %, beim dünneren 3,7 %.

Die Unregelmäßigkeit der Dicke wirkt sich direkt auf die Krümmung aus und verursacht einen Zonenfehler der Linse. Der Zonenfehler, der aus diesem Fehler unseres Materials herrührt, ist für Linsen mit dünnen Scheiben größer.

ZWEITER TEIL

Die Korrektur des Zonenfehlers

Einleitung

Aus den bis dahin geschilderten Versuchen ergaben sich mehrere Wege zur Korrektur der sphärischen und der antisphärischen Aberration. Beschränkt man sich einzig auf die Verwendung der inneren Zonen, fällt die Korrektur leicht (Arbeit II S. 279), aber es ist wünschenswert, die Linse bis weiter an den Rand auszunützen.

Bei dynamischen Linsen gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Korrektur für die Aberration. Entweder läßt sie sich mit der Einzelfläche korrigieren, oder durch Kombination verschiedener Linsenschalen in derselben Linse.

Die Korrektur mit der Einzelfläche bedeutet, daß man jede die Linse abgrenzende Schale für sich so beeinflußt, daß sie sich einer Cartesianischen Fläche nähert.

Bei der zweiten Möglichkeit wird die Linse als Ganzes korrigiert, nicht mehr die einzelne Linsenfläche. Diese Art der Korrektur ist also analog der in der Optik starrer Linsen angewendeten. Bei dynamischen Linsen erreicht man sie, indem man in einer Einkammerlinse die beiden Scheiben zweckentsprechend aufeinander anpaßt, oder durch Verwendung von zwei verschiedenen Füllflüssigkeiten in der Dreikammerlinse.

Beide Wege sind in den nächsten Abschnitten näher zu erörtern.

IX. Korrektur der Einzelfläche

§ 1. Veränderliche Dicke

In Abschnitt VIII § 3 und § 4 wurde dargelegt, wie sich die Scheiben bei verschiedener Dicke verhalten: Dünne Scheiben (Silikatglas von 0,18 und 0,17 mm) geben Linsen mit sphärischer Aberration, während dickere (0,7 mm) bereits Überkorrektur ergeben (antisphärisch). Bei mittleren Dicken (0,4 mm) gehen die Linsen von der antisphärischen Aberration bei schwachem Druck zur sphärischen über, wenn der Druck steigt (also die Brennweite sich verkürzt). (Siehe auch Abb. 22.)

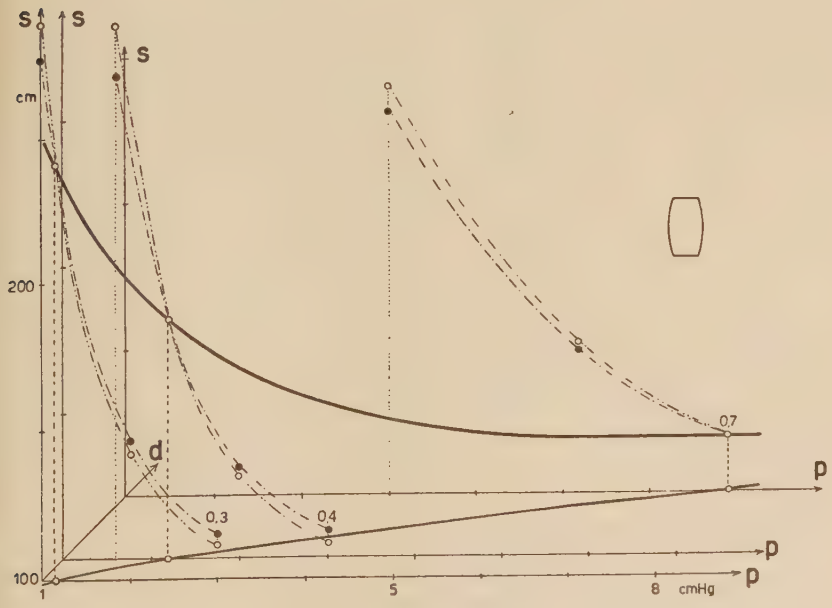

Abb. 25. Korrektur der Aberration. Überzogenes Silikatglas. d = 0,3 mm; 0,4 mm; 0,7 mm, $\varnothing$ = 100 mm, $\varnothing_s$ = 92 mm.

Für jede Linse mit Scheiben mittlerer Dicke gibt es also einen bestimmten Druck, bei dem sich die Kurven der Brennweitenänderungen für die mittleren Zonen (0,5 und 1,0 cm von der Linsenachse) schneiden. Trägt man in einem räumlichen Koordinatensystem auf : Brennweite z, Druck x und Scheibendicke y, so erhält man in Ebenen parallel zu (x, z) solche sich schneidende Kurven der Brennweitenänderung (Abb. 25).

Die Raumkurve, welche alle diese Schnittpunkte miteinander verbindet, ist die Linie, längs der man sich zu bewegen hat, wenn die Aberration in einem größeren Intervall der Brennweite korrigiert sein soll.

Das Durchlaufen der soeben konstruierten Raumkurve bedeutet, daß bei steigendem Druck die Dicke des Glases zunehmen muß. Diese Möglichkeit der Korrektur der dynamischen Linse wäre vielleicht die idealste. Um sie zu realisieren, könnte man zum Beispiel folgenden Weg einschlagen : In gewissen, zu berechnenden Abständen werden außerhalb der eigentlichen Linsenschalen weitere Schalen eingespannt, deren Dicke sich gleichfalls berechnen ließe. Die innerste Schale (welche die Flüssigkeit abgrenzt), würde dann bei der Durchbiegung auf die zweite stoßen und diese dann so weit durchbiegen, bis die dritte berührt wird. Alle drei biegen sich weiter und nehmen dann die vierte Scheibe mit usw. (Abb. 26). Auf diese Art würde die wirksame Dicke der Scheibe mit der Durchbiegung zunehmen. Allerdings wird dieses Vorgehen bei Silikatglas erschwert wegen der geringen bei diesem Material zulässigen Durchbiegung. Mit Plexiglas ist die Realisierung eher möglich, denn bei diesem zeigt sich derselbe Zusammenhang zwischen Dicke und Aberration (Abb. 23 und 24) und der größere Betrag der erreichbaren Durchbiegung würde ein Anbringen der äußeren Scheiben wirksam erlauben.

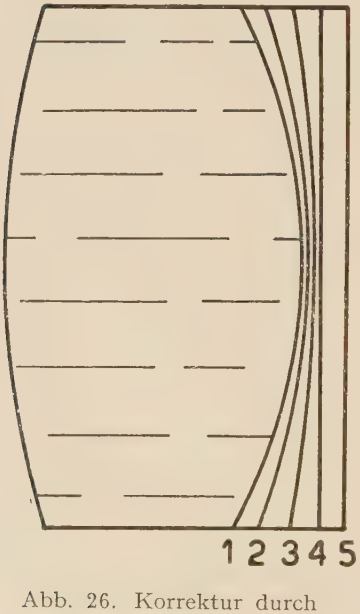

Abb. 26. Korrektur durch veränderliche Dicke.

§ 2. Veränderlicher Radius

Die Überlegung ist hier der vorhergehenden analog. In Kap. VIII § 5 (siehe auch § 4) sahen wir, daß in Bezug auf die Aberration eine Zunahme der Dicke der Linsenschalen einer Abnahme des Radius bei konstanter Dicke gleichkommt. Also wäre es denkbar, statt der bei Druckanstieg zunehmenden Dicke einen abnehmenden Radius einzuführen. Dazu kann am Linsenrand eine Fläche angebracht werden, an die sich der Scheibenrand beim Durchbiegen anschmiegt (Abb. 27). Aus einer systematischen Untersuchungsreihe über Linsen mit verschiedenem Radius wäre es leicht, die Form dieser Anschmiegfläche so zu konstruieren, daß der effektive Radius immer derjenige wäre, für den die Linse beim entsprechenden Druck keine Aberration aufweist. Auch dieses Verfahren eignet sich nur bei größerer Durchbiegung (also bei Plexiglas).

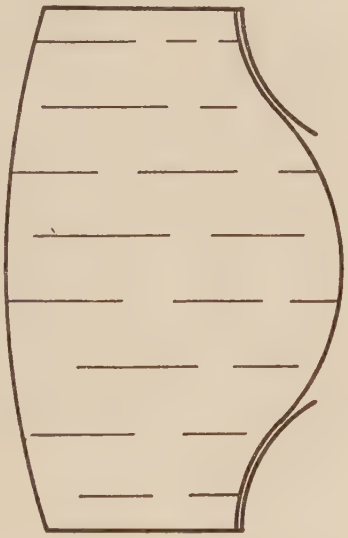

Abb. 27. Korrektur durch veränderlichen Radius.

Die Figur 28 zeigt wieder die räumliche Disposition der Meßergebnisse mit Scheiben gleicher Dicke, aber in verschiedenen Durchmessern eingespannt. Durch Verbinden der korrigierten Punkte ergibt sich wieder eine Raumkurve, die im beschriebenen Verfahren mit veränderlichem Radius durchlaufen werden muß. — In jeder der drei Kurvenscharen ist ein Gebiet vorhanden, in dem die drei inneren Zonen (Linsenöffnung von 3 cm) nahe beieinanderliegende Brennweiten besitzen. In den Abb. 25 und 28 wurden übersichtshalber nur die Kurven der beiden inneren Zonen eingezeichnet.

§ 3. Geformte Scheiben

Eine Annäherung der einzelnen Linsenschale an eine Cartesianische Fläche (zur Korrektur) ist dadurch möglich, daß man das Glas entsprechend schleift. Die Dicke der Scheibe wird dann eine solche Funk-

tion des Radius, daß unter dem Flüssigkeitsdruck die elastische Linie eines Meridians eine vorgegebene Kurve bildet. Diese Kurve braucht nicht notwendigerweise cartesianisch zu sein ; bei geeigneter Abhängigkeit der Dicke vom Radius steht die Möglichkeit offen z. B. Kreise oder

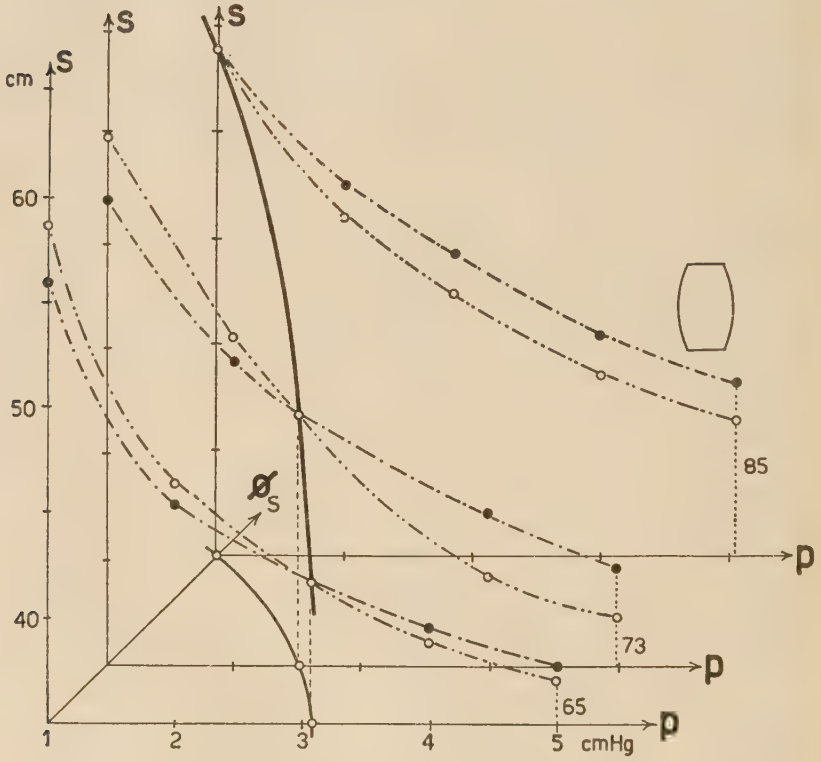

Abb. 28. Korrektur der Aberration.
Plexiglas d = 0,5 mm, $\varnothing_S$ = 65, 73, 85 mm.

Parabeln verschiedener Ordnung als Meridian der durchbogenen Scheibe zu erhalten. Die gewünschte elastische Linie bei entsprechend vermittelter Dickenfunktion wird nur bei einem bestimmten Druck erwartet.

Diese Frage wird im folgenden theoretisch untersucht und es wird sich ergeben, daß im Falle geringer Durchbiegung sich eine solche Randbedingung finden läßt, daß für jeden Druck eine Parabel zweiter Ordnung entsteht. Weiter wird sich ergeben, daß das mathematische Problem des Aufsuchens der Dickenfunktion bei großer Durchbiegung zu einem

physikalisch unrealisierbaren Resultat führt. Diese Unmöglichkeit besteht sogar im Idealfall der frei aufliegenden Platte. Wird die Platte eingespannt, entsteht in der Nähe des Randes ein Wendepunkt, ein Umstand, der in der Wahl der elastischen Linie eine starke Einschränkung bedeutet und den Kreis oder die Parabel als elastische Linie ausschließt. Aus diesem Grunde wurde nur mit einer im Auflagekreis frei drehbaren Platte (Schwingringe) gerechnet.

Zur Diskussion dieser Korrekturmöglichkeit wurde die Differentialgleichung der Scheiben-Dicke als Funktion des Radius für eine offen gelassene Durchbiegungsform abgeleitet und integriert. Aus der so erhaltenen Formel wurden dann die Lösungen für den Kreis und die Parabel als Meridian gesucht. Diese Berechnung mußte für kleine und große Durchbiegungen getrennt durchgeführt werden. Der Ansatz mit der neutralen Schicht, welche Gebiete mit Zug- und solche mit Druckbeanspruchung trennt, ist nur für Durchbiegungen richtig, die kleiner sind als die Scheibendicke. Bei größerer Durchbiegung hat es keinen Sinn mehr von neutraler Schicht zu sprechen, das Material ist dann in seinem ganzen Querschnitt auf Zug beansprucht.

Da sich für den Kreis und die Parabel bei großer Durchbiegung unrealisierbare Lösungen ergeben, wird man für diese Korrekturmöglichkeit mit so dickem Plexiglas arbeiten müssen, daß die Durchbiegungen selbst bei den kleineren Brennweiten in der Größenordnung der Scheibendicke bleiben. Es besitzt dann die erste Rechnung Gültigkeit. Außerdem ist es leichter dem Plexiglas die gewünschte Form zu geben als dem härteren, brüchigeren und viel dünneren Silikatglas.

a) *Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe nicht konstanter Dicke, bei kleiner Durchbiegung.*

Ist x die von der Mitte aus gezählte Koordinate des Meridians einer Kreisscheibe (d. h. der Radiusvektor), so möchte man eine Funktion h(x) für die Dicke finden, so daß bei Belastung die Meridianlinie eine gegebene Form annimmt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung für die Durchbiegung einer Kreisscheibe kann man in dem vorliegenden Fall nicht brauchen, denn jene ist für konstantes h abgeleitet. Die Herleitung der Differentialgleichung etwa nach Föppl [1] diene als Weg zur Aufstellung der gesuchten Gleichung mit $h = h(x)$.

[1] Föppl: Technische Mechanik, Band III: Festigkeitslehre.

O (x, z) sei ein Punkt der neutralen Faser. Durch diesen Punkt legen wir einen Querschnitt durch den Träger. Dieser ursprünglich senkrechte Schnitt neigt sich bei der Belastung um den Winkel ω. P sei ein Punkt des Querschnittes, λ ist sein Abstand von O. Als z-Achse wählen wir die Symmetrieachse, d. h. die Achse durch den Scheibenmittelpunkt (Abb. 29).

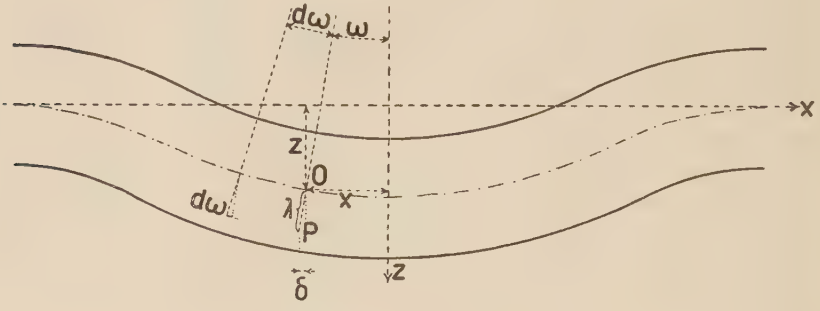

Abb. 29.

Der Kreis durch P mit Mittelpunkt auf der z-Achse dehnt sich bei der Durchbiegung. Sein Radius wächst um

$$\delta = \lambda \sin \omega \tag{1}$$

also dehnt sich der Umfang um $2 \pi \delta$. Die spezifische tangentielle Dehnung ist somit:

$$\varepsilon_t = \frac{\lambda \sin \omega}{x} \tag{2}$$

Die Faser durch P ist in ihrem durch die Querschnitte ω und $\omega + d\omega$ begrenzten Abschnitt um $\lambda \, d\omega$ länger geworden. Infolgedessen ist die spezifische radiale Dehnung

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda \, d\omega}{dx} \tag{3}$$

Bei reinem Zug gilt das Hook'sche Gesetz

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{F}$$

Für die Tangential- und Radialspannung ergibt sich (unter Berücksichtigung von (2) und (3)

$$\sigma_t = \frac{m E}{m^2 - 1} \lambda \left(m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{d\omega}{dx} \right) \tag{4}$$

$$\sigma_r = \frac{m E}{m^2 - 1} \lambda \left(\frac{\sin \omega}{x} + m \frac{d\omega}{dx} \right) \tag{5}$$

Jetzt schneiden wir aus der Kreisscheibe einen Sektor mit dem beliebig kleinen Winkel (mit Scheitel in der z-Achse) $d\varphi$ heraus und untersuchen die Spannungen an seinen Seitenflächen. Im Sektor selber grenzen wir ein Element durch die Kreise mit Radius x und $x + dx$ ab (Abb. 30).

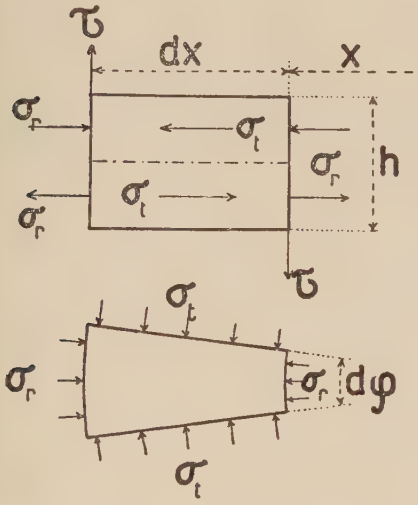

Abb. 30.

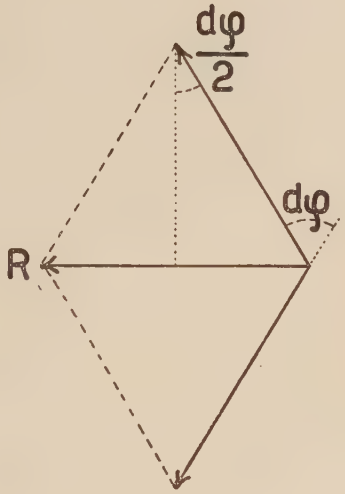

Abb. 31.

I. Die Tangentialspannungen σ_t. Zu jedem $\sigma_t\, dF$ der einen Fläche gehört ein gleich großes entgegengesetzt gerichtetes $\sigma_t\, dF$ der anderen Fläche. Alle Richtungen schneiden sich in der vertikalen Symmetrieebene des Plattenelementes. Ihre Resultierende fällt in diese Symmetrieebene (Abb. 31).

$$R = \sigma_t\, dF\, d\varphi$$

Die Kraft R wirkt im Abstand λ von der neutralen Faserschicht. Ihr Moment in Bezug auf diese Schicht beträgt deswegen: $\sigma_t \cdot dF \cdot d\varphi \cdot \lambda$. Das gesamte Moment der Tangentialspannungen ist folglich

$$d\varphi \int \sigma_t \lambda\, dF = d\varphi\, \frac{m E}{m^2 - 1} \left(m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{d\omega}{dx} \right) \int \lambda^2\, dF$$

Das Integral erstreckt sich über die Meridianschnittfläche der Länge dx (Abb. 32). Dabei soll jetzt angenommen werden, die Dicke h sei

Funktion von x. Einschränkend soll verlangt sein, daß die neutrale Schicht auch Symmetrieebene ist (was aus der Definition der neutralen Schicht folgen muß). Unter Vernachlässigung von Differentialen höherer Ordnung berechnet sich das Integral zu

$$\int \lambda^2 \, \mathrm{d}\, F = \frac{h^3(x)}{12} \, \mathrm{d}\, x$$

$$\text{Moment der } \sigma_t = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{12} \frac{m\,E}{m^2 - 1} \left(m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,x} \right) h^3(x) \, \mathrm{d}\, x \tag{6}$$

Legen wir die Uhrzeigerrichtung für die Momente als positiv fest, so ist das Moment der σ_t-Kräfte negativ und folglich mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzusetzen.

II. Radialspannungen σ_r. In der zum Radius x gehörenden Schnittfläche bilden die σ_r das Moment:

$$\int \sigma_r \, \lambda \, \mathrm{d}\, F = \frac{m\,E}{m^2 - 1} \left(\frac{\sin \omega}{x} + m \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,x} \right) \int \lambda^2 \, \mathrm{d}\, F$$

$\int \lambda^2 \cdot \mathrm{d}\, F$ ist das Trägheitsmoment des Rechteckes mit der Breite $x \, \mathrm{d}\, \varphi$ und der Höhe h(x), also

$$\int \lambda^2 \, \mathrm{d}\, F = \frac{h^3(x)}{12} \, x \, \mathrm{d}\, \varphi$$

und das Moment der σ_r-Kräfte ist im Schnitt x:

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{12} \frac{m\,E}{m^2 - 1} \left(\sin \omega + m\,x \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,x} \right) h^3 \tag{7}$$

An der Schnittfläche mit dem Radius $x + dx$ haben die σ_r ein entgegengesetzt gerichtetes Moment. Auf das Trägerelement wirkt der Unterschied der beiden Momente, welcher gleich dem Differential des Ausdruckes (7) ist. Das Differential entspricht einem Anwachsen des Abstandes x um dx.

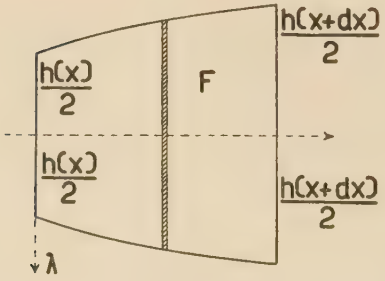

Abb. 32.

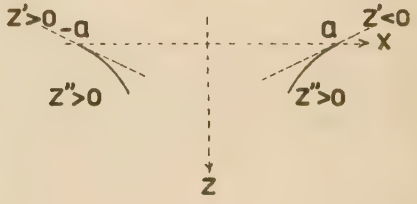

Abb. 33.

$$\text{Moment aller } \sigma_r = \frac{d\varphi}{12}\frac{m E}{m^2-1}\left\{\left(\cos\omega\frac{d\omega}{dx}+m\frac{d\omega}{dx}+m x\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)h^3 dx+\right.$$

$$\left.+\left(\sin\omega+m x\frac{d\omega}{dx}\right)3h^2h' dx\right\} \qquad (8)$$

Dieser Ausdruck ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen, denn das Moment der σ_r-Kräfte ist positiv.

III. Schubspannungen τ. p sei der Druck auf das Flächenelement der Platte. Auf den Kreis mit Radius x drückt die Last $\pi x^2 p$. Die Schubkräfte an der Peripherie des Kreises halten dieser Last das Gleichgewicht. Auf den Teil im Sektor mit Winkel $d\varphi$ kommt davon der Bruchteil $d\varphi/2\pi$ also

$$\tau_x = \frac{d\varphi}{2\pi}\pi x^2 p = \frac{x^2 p}{2} d\varphi$$

Für den Schnitt mit Radius $x + dx$ des Sektors ist

$$\tau_{x+dx} = \tau_x + \frac{d\tau}{dx} dx$$

Moment der τ auf das Plattenelement.

$$\text{Mom. d. } \tau = \frac{x^2 p}{2} dx\, d\varphi \qquad (9)$$

Das Moment ist positiv, also kein Vorzeichenwechsel.

IV. Momentengleichung. Für das Gleichgewicht muß die Summe aller Momente verschwinden. Daraus ergibt sich mit der Substitution

$$\frac{6(m^2-1)}{m E} p = N \qquad (10)$$

die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$m x h^3\frac{d^2\omega}{dx^2} - h^2\left(-h + h\cos\omega + m h + 3\frac{dh}{dx} m x\right)\frac{d\omega}{dx} +$$

$$+ h^2\left(-\frac{m}{x} h + 3\frac{dh}{dx}\right)\sin\omega + N x^2 = 0 \qquad (11)$$

Für kleine Durchbiegungen ist $\cos\omega = 1$, $\sin\omega = \omega$. Mit $h =$ konst. wird die Gleichung (11):

$$x^2\frac{d^2\omega}{dx^2} + x\frac{d\omega}{dx} - \omega + \frac{N}{m h^3} x^3 = 0 \qquad (12)$$

die von Föppl angegebene Differentialgleichung.

Der Zweck unserer Rechnung ist aber nicht der, die Gleichung für die Durchbiegung zu finden, sondern bei gegebener Durchbiegung und

Form der elastischen Linie die Funktion $h = h(x)$ zu ermitteln. Es wird also z als bekannte Funktion von x vorausgesetzt. Die Gleichung (11) kann man zu einer solchen für h umordnen:

$$3\,h'\,h^2\,(m\,x^2\,\omega' + x\sin\omega) + h^3\,(m\,x^2\,\omega'' - x\,\omega' + \\ + x\,\omega'\cos\omega + m\,x\,\omega' - m\sin\omega) + N\,x^3 = o \qquad (13)$$

Ist a der Radius des Kreises, auf dem die Platte ruht, und wirkt die Belastung nur innerhalb des Auflagekreises, so ist für den über diesen Kreis herausragenden Teil der Scheibe dieselbe Differentialgleichung gültig, in der dann $N = o$ zu setzen ist. Die Randbedingungen (die wir weiter unten behandeln) sind dann nicht für $x = a$ gültig, sondern für den Rand der Scheibe. Für $x = a$ geben die Stetigkeitsbedingungen den Übergang von der Gleichung mit N zu der mit $N = o$.

b) *Randbedingungen und Lösungsmöglichkeiten.*

Bei frei aufliegender Scheibe muß am Rand die Radialspannung verschwinden. Also für $x = a$ muß sein:

$$(5) \quad \frac{\sin\omega}{x} + m\,\omega' = o \qquad (14)$$

Es sei nun $z = f(x)$ als elastische Linie vorgegeben. Es ist dann:

$$\omega' = \frac{f''}{1 + f'^2}$$

und

$$\sin\omega = \pm\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

Wegen $\omega < \pi/2$ muß hier die positive Wurzel genommen werden. Die Randbedingung wird:

$$\frac{f'}{x\sqrt{1 + f'^2}} + m\,\frac{f''}{1 + f'^2} = o$$

Beide Ausdrücke $\sqrt{1 + f'^2}$, $1 + f'^2$ sind positiv. Die Randbedingung kann also nur dann erfüllt sein, wenn f'/x und f'' entgegengesetzte Vorzeichen für $x = a$ annehmen. Aus physikalischen Gründen (Durchbiegung) muß für $x = a$: f' negativ sein, also fordert die Randbedingung für $x = a$: $f'' > o$. Dasselbe gilt wegen der Rotationssymmetrie auch für $x = -a$. (Dort ist f' positiv, f'/x negativ, also muß f'' positiv sein.) Positive zweite Ableitung bedeutet (für unsere z-Richtung), daß die Krümmung nach unten verläuft. Ein Wendepunkt ist folglich nicht zu vermeiden (Abb. 33). Wir werden also für f(x) nicht irgend eine Funktion, wie z. B. einen Kreis oder eine Parabel wählen können.

Um trotzdem eine beliebige elastische Linie verlangen zu dürfen, ist die Randbedingung abzuändern. Es muß erreicht werden, daß nicht mehr für $x = a$ gefordert wird $\sigma_r = o$. Das geschieht, indem man am Rand ein Kraftmoment anbringt. Dies ist auch physikalisch plausibel, denn ein solches Moment kann den Wendepunkt durchdrücken (Abb. 34).

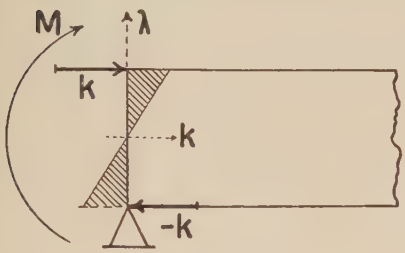

Abb. 34.

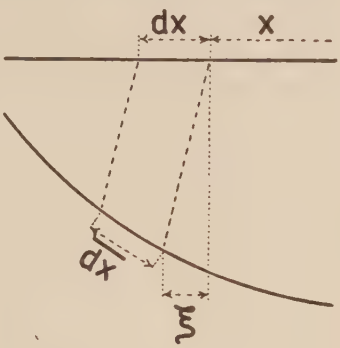

Abb. 35.
(Zu Seite 74).

Ist H die Dicke der Scheibe am Rand, so wirke pro Längeneinheit des Umfanges das Moment

$$M = 2\,k\,\frac{H}{2}$$

welches hervorgebracht wird durch die Kräfte k, die tangential zu den Scheibenoberflächen wirken. Physikalisch ließen sich diese Kräfte schwer realisieren, deswegen führen wir andere Kräfte ein, die auf die ganze seitliche Fläche wirken sollen. Die Verteilung dieser Kräfte über die Seitenfläche geschehe nach dem Ansatz

$$k' = c \cdot \lambda$$

Die Momente dieser k'-Kräfte und der k-Kräfte sollen gleich sein

$$k\,\frac{H}{2} = \int_0^{H/2} c\,\lambda \cdot \lambda \cdot d\,\lambda = \frac{c}{3}\,\frac{H^3}{8}$$

woraus folgt:

$$c = \frac{12\,k}{H^2}$$

Die neue Randbedingung wird jetzt: ($\sigma_r = \lambda c$)

$$\frac{\sin \omega}{x} + m \frac{d \omega}{d x} = \frac{12 k}{H^2} \frac{m^2 - 1}{m E} \tag{15}$$

Durch dieses neue Moment am Rande bleibt die Differentialgleichung der elastischen Linie dieselbe, denn für die Beanspruchung ist es gleichmäßig über die ganze Fläche verteilt und käme als konstantes Glied in die Differentialgleichung zweiter Ordnung in z, also tritt es in der Gleichung zweiter Ordnung in ω (dritte Ordnung für z) nicht auf.

Für $\sin \omega = \omega$ und $\cos \omega = 1$ kann man die Differentialgleichung (13) schreiben:

$$\boxed{h' = \frac{-1}{3 A} \left(h B + \frac{N x^2}{h^2} \right)} \tag{16}$$

dabei ist

$$\boxed{A = x \left(m \omega' + \frac{\omega}{x} \right) ; \; B = m x \omega'' + m \omega' - m \frac{\omega}{x}}$$

Die Randbedingung (15) wird

$$\boxed{\frac{\omega}{x} + m \omega' = 12 \frac{k (m^2 - 1)}{H^2 m E}} \tag{17}$$

c) *Integration für die Parabel zweiter Ordnung.*

Ist v der Parameter der Parabel und a die Apertur (der Radius der Scheibe), so lautet die Gleichung der Parabel:

$$z = 2 v (a^2 - x^2) \tag{18}$$

Die Randbedingung gibt für diesen Fall:

$$v = 3 \frac{k (m - 1)}{H^2 m E}$$

Durch Einsetzen von $\omega = -z'$ in die Gleichung (16) (die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Bedingung $h = H$ für $x = a$) erhält man die gesuchte Funktion

$$h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3 \tag{19}$$

Soll die elastische Linie bei jeder Belastung eine Parabel bleiben (v wird sich mit der Belastung ändern), genügt es den Quotienten p/k konstant zu halten. D. h. ändert man das Moment am Rand proportional zur Belastung (Flüssigkeitsdruck), was sich experimentell leicht durchführen läßt, ist die elastische Linie der nach (19) geformten Scheibe bei jeder Belastung eine Parabel zweiten Grades.

Für den Fall H = 0,1 cm, h_0 (Dicke in der Mitte) = 0,3 cm ergibt sich aus (19):

$$p = 0{,}416\ k$$

d) *Integration für die Parabel vierter Ordnung.*

Die Gleichung dieser Parabel ist

$$z = v\,(a^4 - x^4) \tag{20}$$

Die Randbedingung gibt:

$$v = \frac{3\,k\,(m^2 - 1)}{H^2\,m\,E\,a^2\,(1 + 3\,m)}$$

und die Lösung der Gleichung (16) ist

$$h^3 = H^2\,\frac{x}{a}\left[\frac{p}{k}\,\frac{e^{\frac{16\,m}{3\,m+1}}}{2}\,a^4\left(1 - \frac{x}{a}\right) + H\right] \tag{21}$$

Auch in diesem Fall genügt das Konstanthalten von p/k, um den Charakter der Meridianlinie von der Belastung unabhängig zu machen. Physikalisch ist aber die Lösung (21) unmöglich, denn für die Mitte (x = o) folgt h_0 = o.

e) *Integration für Parabeln höherer Ordnung.*

Für die Parabel

$$z = v\,(a^n - x^n) \tag{22}$$

mit n > 2 ergibt sich wieder eine ähnliche Formel wie (21), die also für x = o den physikalisch unannehmbaren Wert h_0 = o liefert.

f) *Integration für einen Kreis.*

Der Meridian sei ein Kreis mit Parameter (Radius) w. Seine Gleichung ist

$$z = \sqrt{w^2 - x^2} - \sqrt{w^2 - a^2} \tag{23}$$

Da die gemachte Annäherung $\sin \omega = \omega$ und $\cos \omega = 1$ dem Gleichsetzen von Kreis und Parabel äquivalent ist, ergibt sich hier dieselbe Lösung wie für die Parabel zweiten Grades, wie auch die Durchrechnung zeigt.

$$h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3 \tag{24}$$

Die Randbedingung liefert:

$$w = \frac{H^2 \, m \, E}{12 \, k \, (m - 1)}$$

also

$$\frac{1}{w} = 4 \, v$$

g) *Diskussion.*

Die Lösung für den Kreis und die Parabel zweiten Grades enthält den Faktor p/k. Soll die Formgebung der Membran für jede Durchbiegung dieselbe sein, ohne daß sich die elastische Linie bei verschiedenen Drucken in ihrem Charakter ändert, genügt es, diesen Wert konstant zu halten.

Es seien noch einige Zahlenwerte für die Dicken angegeben, um sich ein Bild der Gestalt der Scheibe zu machen:

H = 0,1 cm	p/k = 1,0	h_o = 0,86 cm
	0,5	0,68
	0,1	0,27
0,05	1,0	0,25
	0,5	0,199
	0,1	0,119

Diese Maße, namentlich die für H = 0,05 cm sind in realisierbaren Größenordnungen.

Es ist noch der Parameter v in Funktion der Belastung zu finden. Zu diesem Zweck setzen wir (18) und (19) in (16) ein und erhalten:

$$2 \, v = 6 \, p \, \frac{m - 1}{m \, E} \, \frac{1}{p/k} \, \frac{1}{H^2}$$

Zusammenfassend ist also für Durchbiegungen der Größenordnung der Plattendicke bei Scheiben, deren Dicke h der Gleichung

$$\boxed{h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3} \tag{25}$$

genügt, die elastische Linie eines Meridians: die Parabel:

$$z = 6\,p\,\frac{m-1}{m\,E}\,\frac{1}{H^2}\,\frac{1}{p/k}\,(a^2 - x^2) \qquad (26)$$

oder der Kreis:

$$z = \sqrt{\left[\frac{m\,E}{m-1}\,\frac{1}{12\,p}\,\frac{p}{k}\,H^2\right]^2 - x^2} - \sqrt{\left[\frac{m\,E}{m-1}\,\frac{1}{12\,p}\,\frac{p}{k}\,H^2\right]^2 - a^2} \qquad (27)$$

denn in der gemachten Annäherung fallen Kreis und Parabel zusammen.

p/k ist wählbar, experimentell ist also das Moment am Rand (H × k) proportional der Belastung zu nehmen, um die gewünschte Form der Durchbiegung bei jeder Belastung beizubehalten.

Für Parabeln höherer Ordnung ist die Lösung nicht mehr zulässig.

h) *Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe bei großer Durchbiegung.*

Bei großer Durchbiegung ist die in den vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Rechnung nicht mehr gültig. Es ist jetzt nicht mehr zulässig, von neutraler Faser zu sprechen, denn das Material wird im ganzen Querschnitt nur noch auf Zug beansprucht. Dabei werden σ_x und σ_y über den ganzen Querschnitt als konstant angenommen. Außerdem soll angenommen werden, daß im unbelasteten Zustand die Platte nicht angespannt ist, so daß alle Spannungen bei der Durchbiegung nur von den Lasten herrühren. Diese Voraussetzung ist für die Schalen der dynamischen Linse erfüllt. Aus den geänderten Voraussetzungen geht hervor, daß der Ansatz für die Ableitung der Differentialgleichung im Falle großer Durchbiegungen ein anderer sein muß. Auch hier wird eine Rechnung aus Föppl: Technische Mechanik [1] übernommen und für unseren Fall nicht konstanter Dicke abgeändert.

Die Durchbiegung sei größer als die Dicke der Platte. Aus einem dx wird in einem analogen ebenen Fall ein ds nach der Gleichung:

$$d\,s = \sqrt{1 + z'^2}\,d\,x$$

Da z' klein gegenüber 1 ist, kann man dies schreiben:

$$d\,s = d\,x\left(1 + \frac{1}{2}\,z'^2\right)$$

[1] Föppl: Technische Mechanik, Band V: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie (Leipzig 1907), S. 132 ff.

Für das uns vorliegende Problem sind partielle Ableitungen zu setzen. Also sind die Dehnungen in der x- und y-Richtung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Außer dieser Dehnung ist bei großer Durchbiegung noch die Verschiebung parallel zur Plattenebene zu berücksichtigen. ξ und η seien die Komponenten dieser Verschiebungen in der x- und y-Richtung (Abb. 35), Seite 69. Die entsprechenden Dehnungen sind dann $^{d\xi}/_{dx}$ und $^{d\eta}/_{dy}$.

Jetzt kann man die totale Dehnung in den Richtungen x und y anschreiben:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

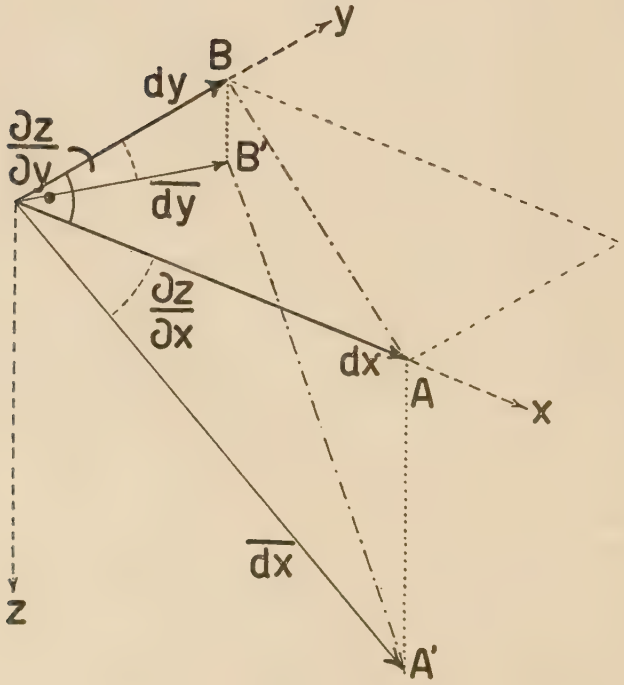

Abb. 36.

Unter Berücksichtigung der Querkontraktion sind dann die Spannungen in den beiden Richtungen:

$$\sigma_x = \frac{m\,E}{m^2-1}\left\{ m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right\} \qquad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{m\,E}{m^2-1}\left\{ m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right\} \qquad (2)$$

Bei der Beanspruchung ändert sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und dy um γ. $\overline{dx}$ und $\overline{dy}$ seien die Linienelemente nach der Deformation (Abb. 36). Aus dem ursprünglichen

$$ds^2 = \overline{AB}^2 = dx^2 + dy^2$$

wird das deformierte

$$\overline{ds}^2 = \overline{A'B'}^2 = ds^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx - \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2$$

Berücksichtigt man noch

$$\overline{dx} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2}$$

und

$$\overline{dy} = \sqrt{dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2}$$

kann man den Kosinussatz anwenden, aus dem wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma \approx \gamma$ durch Einsetzen der soeben berechneten Werte von dx, dy, ds, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung, resultiert:

$$\gamma_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ein weiterer Beitrag zur Winkeländerung kommt von den Verschiebungen ξ, η her (Abb. 37). Verschiebt man $\overline{dx}$, $\overline{dy}$ an den Ursprung von dx, dy zurück, kann man die Winkeländerung leicht aus der Figur ablesen. Durch die Verschiebung ξ, η ändert sich der rechte Winkel um

$$\gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Die totale Winkeländerung ist demnach

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (3)$$

$\gamma > 0$ bedeutet Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels. Die Schubspannung ist

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = G\,\gamma$$

wobei G den Schubspannungsmodul bezeichnet:

$$G = \frac{m\,E}{2\,(m+1)}$$

Betrachten wir jetzt ein Plattenelement mit den Kanten dx, dy, h und stellen wir für dieses die Gleichgewichtsbedingung auf. Im Falle großer Durchbiegung hat die σ_x Spannung eine merkliche vertikale Komponente (Abb. 38). Sie ist

$$\sigma_x \frac{\partial z}{\partial x}\,h\,dy$$

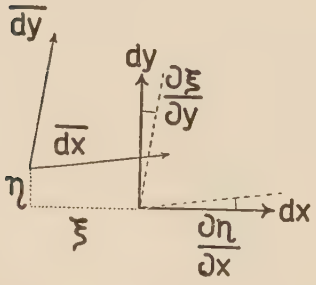

Abb. 37.

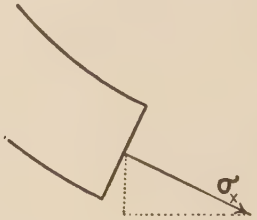

Abb. 38.

Da h jetzt nicht konstant sein soll, müßte man an Stelle von $h \cdot dy$ schreiben:

$$\int_y^{y+dy} h\,dy = dy \cdot h\,(x, y + \theta\,dy)$$

was aber bis auf Differentiale höherer Ordnung wieder zu $h \cdot dy$ führt. Auf der entgegengesetzten Seite des Plattenelementes kommt das Differential dieser Kraft hinzu. Die Resultierende der beiden Kräfte ist das Differential selber:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma_x \frac{\partial z}{\partial x}\,h\right] dx \cdot dy \qquad (4)$$

Analog gilt für die y-Richtung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sigma_y \frac{\partial z}{\partial y}\,h\right] dx\,dy \qquad (5)$$

Die vertikale Komponente der Schubspannung auf der Seitenfläche $h \cdot dy$ ist

$$\tau \frac{\partial z}{\partial y} h \, dy$$

Die Summe mit den Schubkräften auf der gegenüberliegenden Seite ist wieder das Differential davon:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau \frac{\partial z}{\partial y} h\right] dx \, dy \qquad (6)$$

Für die anderen Seitenflächen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau \frac{\partial z}{\partial x} h\right] dx \, dy \qquad (7)$$

Die Gleichgewichtsbedingung erhält man, indem man die Summe aller vertikalen Komponenten der auf das Trägerelement wirkenden Spannungen der Belastung gleichsetzt. Im Falle des Flüssigkeitsdruckes ist diese senkrecht zum Trägerelement. Die lotrechte Komponente der Belastung von p gr*/cm² ist (Abb. 39)

$$p_v = p \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

was bei Vernachlässigung höherer Ordnung sich zu

$$p \, dx \, dy \qquad (8)$$

vereinfacht. Hier wird also von der Neigung von p abgesehen, denn dazu werden höhere Potenzen von $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ vernachlässigt. Weiter unten (Gleichungen 10 und 11) wird diese Vernachlässigung nicht mehr zulässig sein, denn dort käme sie einem Unterschlagen der ersten Potenz derselben Ableitung gleich.

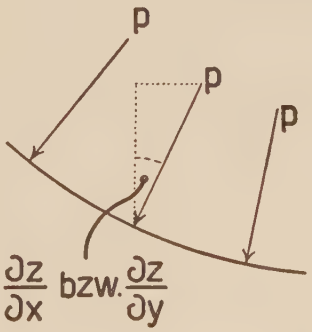

Abb. 39.

Die Gleichgewichtsbedingung, die sich aus den Gleichungen (4), (5), (6), (7), (8) nach Kürzen mit $dx \cdot dy$ ergibt, liefert die Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sigma_x \frac{\partial z}{\partial x} + \tau \frac{\partial z}{\partial y}\right) h\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\sigma_y \frac{\partial z}{\partial y} + \tau \frac{\partial z}{\partial x}\right) h\right] = -p \qquad (9)$$

Es ist aber noch die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen Verschiebungen aufzustellen.

Auf die Raumeinheit wirke die Kraft (XYZ). Die Elastizitätstheorie zeigt, daß dann für das Parallelepiped dx.dy.dz die Gleichungen gelten :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = o \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = o \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = o \end{cases}$$

In unserem Fall ist $\sigma_z = o$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = o$ und $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$.
Die Kraft auf das Parallelepiped ist p dx dy. Da das Volumenelement $dx \cdot dy \cdot h$ ist, beträgt die auf die Raumeinheit bezogene Kraft p/h. In die Gleichungen sind davon die beiden horizontalen Komponenten X und Y (in der x- und y-Richtung) einzusetzen. Es ist (Abb. 39) :

$$X = \frac{p}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad Y = \frac{p}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

also

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{p}{h}\frac{\partial z}{\partial x} = o & (10) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{p}{h}\frac{\partial z}{\partial y} = o & (11) \end{cases}$$

Differentiert man (9) und setzt (10) und (11) ein, erhält man :

$$\left\{ -\frac{p}{h}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right\} h +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -p \quad (12)$$

Darin ist F die Spannungsfunktion, d. h. eine Funktion, die so gewählt wurde, daß

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

Die Gleichung (12) genügt noch nicht, um Aufgaben zu lösen, denn sie enthält noch die unbekannte Funktion F. Es ist also eine weitere

Gleichung abzuleiten, die F enthält. Dazu differenzieren wir (3) nacheinander nach x und nach y. Die Werte der Ableitungen von $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, die dabei auftreten werden, entnehmen wir den nach $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ aufgelösten Gleichungen (1) und (2). Die Rechnung ist etwas lang, aber ohne Schwierigkeiten durchführbar, so daß wir hier nur das Resultat notieren:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] \qquad (14)$$

Die Gleichungen (12) und (14) sind für die durchbogene Scheibe (oder Platte) zusammen gültig.

Der hier interessierende Fall der Linsenschale ist rotationssymmetrisch. Es ist deswegen praktischer, diese Gleichungen in Polarkoordinaten umzuschreiben.

Mit dem Index r sei die radiale, mit t die tangentiale Richtung bezeichnet. Es ist dann:

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \qquad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \qquad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t} \quad (15)\ (16)\ (17)$$

Legen wir x in die r-Richtung und y dazu senkrecht. Statt t möchte man aber das φ der Polarkoordinaten, also sind die entsprechenden Ableitungen der Spannungsfunktion F auszurechnen.

Aus $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ folgen die partiellen Ableitungen nach x und y als Funktion derjenigen nach r und φ. Die Ableitungen von F und h nach φ verschwinden wegen der Kreissymmetrie.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \cos\varphi \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (20)$$

Gleichung (12) wird dadurch, nach wiederholter Berücksichtigung der Beziehung $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

$$\frac{d}{dr}\left(h\frac{dF}{dr}\frac{dz}{dr}\right) = p\,r\left[\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 - 1\right] \qquad (21)$$

Auch Gleichung (14) ist dementsprechend in Polarkoordinaten umzuschreiben:

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)\right]=-\frac{E}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

Infolgedessen ist das erste Integral von (14):

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)=-\frac{E}{2}\left(\frac{dz}{dr}\right)^2+C$$

Für $r=o$ ist die Tangente horizontal, also $dz/dr=o$, folglich verschwindet die Integrationskonstante C.

Um die gebräuchlicheren Bezeichnungen wieder einzuführen, werden wir den Radius x (statt r) nennen.

Es sei die neue Funktion L so definiert, daß

$$\frac{dF}{dr}=\frac{dF}{dx}=L \qquad (22)$$

Die beiden Gleichungen der elastischen Linie werden jetzt:

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{dL}{dx}+\frac{1}{x}L\right)=-\frac{E}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dx}\left(hL\frac{dz}{dx}\right)=px\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-1\right] \qquad (24)$$

Beide Gleichungen gelten gleichzeitig. Für eine Lösung ist zwischen ihnen L zu eliminieren.

i) *Randbedingungen.*

Am Rande ist die tangentielle Dehnung $\varepsilon_t=\frac{1}{E}\left(\sigma_t-\frac{1}{m}\sigma_r\right)=o$

$$\frac{dL}{dx}-\frac{1}{mx}L=o \qquad \text{für } x=a \qquad (25)$$

Es muß dort die Radialspannung verschwinden, $\sigma_r=o$:

$$\frac{1}{x}L=o \qquad \text{für } x=a \qquad (26)$$

Die Randbedingungen sind folglich:

$$\frac{dL}{dx}=L=o \qquad \text{für } x=a \qquad (27)$$

k) *Integration für eine Parabel zweiten Grades.*

Für unseren Fall, bei dem eine elastische Linie $z = z(x)$ vorgegeben ist, löst man die Gleichungen (23) (24), indem man z in (23) einsetzt und aus dieser Gleichung L berechnet. Setzt man dann z und L in (24) ein, entsteht eine Gleichung für h(x).

Es sei nun als Meridianlinie der durchgebogenen Membran die Parabel gewünscht:

$$z = v\,(a^2 - x^2) \tag{28}$$

Aus (23) folgt dafür, unter Berücksichtigung der Randbedingungen (27):

$$L = -\frac{v^2\,E}{4}\,\frac{1}{x}\,(x^2 - a^2)^2$$

Damit folgt aus (24) die Lösung:

$$\boxed{h = \frac{\frac{p\,x^2}{v\,E}\left(2\,x^2 - \frac{1}{v^2}\right) + a^4\,h_o}{(x^2 - a^2)^2}} \tag{29}$$

l) *Integration für einen Kreis als Meridian.*

Ist wieder w der Kreisradius und a die Apertur (Radius des Auflagekreises), so lautet die Kreisgleichung

$$z = \sqrt{w^2 - x^2} - \sqrt{w^2 - a^2} \tag{30}$$

Gleichung (23) gibt dafür in Verbindung mit den Randbedingungen (27):

$$L = \frac{E}{8}\,\frac{1}{x}\left[(x^2 - w^2)\,\ln\frac{w^2 - x^2}{w^2 - a^2} - (x^2 - a^2)\right] \tag{31}$$

Das Integral von (24) ist

$$\boxed{h = \frac{\frac{w^2}{2}\ln\frac{w^2 - x^2}{w^2} + x^2 - \frac{E}{8\,p}\,\frac{h_o}{w}\left[w^2\ln\frac{w^2}{w^2 - a^2} - a^2\right]}{\frac{E}{8\,p}\,\frac{1}{\sqrt{w^2 - x^2}}\left[(x^2 - w^2)\ln\frac{w^2 - x^2}{w^2 - a^2} - (x^2 - a^2)\right]}} \tag{32}$$

m) *Integration für die Parabel vierten Grades.*

$$Z = v\,(a^4 - x^4) \tag{33}$$

Gleichung (24) wird jetzt

$$\frac{4\,E\,v^3}{6\,p}\,h\,x^2\,(x^8 - 4\,a^6\,x^2 + 3\,a^8) = 2\,v^2\,x^8 - \frac{x^2}{2} + C$$

Für $x = o$ folgt daraus $h = \infty$, wenn $C \neq o$ sein soll. Durch die willkürliche Festsetzung $C = o$ kommt die Integrationskonstante h_o in Wegfall. Wir schreiben das Resultat trotzdem auf:

$$h = \frac{2\, v^2\, x^6 - {}^1/_2}{\frac{2}{3}\frac{E\, v^3}{p}\,(x^8 - 4\, a^6\, x^2 + 3\, a^8)} \tag{34}$$

n) *Parabeln höherer Ordnung.*

Aus dem Gang der Rechnung für die Parabel zweiter Ordnung sieht man sofort, daß für Parabeln höherer Ordnung sich ähnliche Lösungen anschreiben lassen. Im Nenner wird immer ein Polynom stehen (seine Ordnung wächst mit derjenigen der Parabel), das für $x = a$ eine Nullstelle aufweist.

o) *Diskussion.*

Die Integration der Differentialgleichungen für große Durchbiegungen einer Kreisscheibe für eine Parabel zweiter Ordnung, einen Kreis, eine Parabel vierter Ordnung als Meridianlinie, führte zu den Lösungen (29), (32) und (34). Die drei Funktionen stellen die Dicke der frei aufliegenden kreisrunden Membran als Funktion des Radius x dar, um die drei elastischen Linien des Diagonalschnittes zu erhalten. Die Lösungen sind noch nicht endgültige Resultate, denn in allen steht außer dem Flüssigkeitsdruck p noch der Kurvenparameter v (Parabeln) oder w (Kreis), die ja Funktion von p sind. Es ist aber überflüssig diese Funktionen noch zu bestimmen, denn die drei Resultate haben für uns keine Bedeutung. Sie lassen sich nämlich nicht realisieren, denn für $x = a$ folgt aus ihnen $h = \infty$. In den beschriebenen Fällen und für Parabeln höherer Ordnung (siehe unter n) sollte also die Dicke am Rande unendlich werden.

Muß aber wirklich die Berechnung für große Durchbiegungen Verwendung finden?

Für eine Brennweite von 50 cm und unsere übliche Füllung mit $n = 1{,}479$ gibt die Formel (30) eine Durchbiegung von ca. 0,3 cm. Verwendet man also Glas in den uns gebräuchlichen Qualitäten, so ist für so große Durchbiegungen nur das allerdünnste von höchstens 0,02 cm zu gebrauchen. Die Durchbiegung ist also viel größer als die Plattendicke. Es steht somit außer Zweifel, daß die Berechnung für große Durchbiegungen Anwendung finden muß, die zu physikalisch unmöglichen Lösungen führte.

Verwendet man hingegen Plexiglas, so bietet es keine Schwierigkeiten, Platten von 0,3 cm in der gleichen Größenordnung ihrer Dicke durchzubiegen. Für diesen Fall gilt aber angenähert die früher durchgeführte Berechnung für kleine Durchbiegungen, die für die Parabel zweiter Ordnung und den Kreis zu realisierbaren Lösungen führte.

Also kommt man zum Schluß:

Es ist so dickes Plexiglas zu verwenden, daß die Durchbiegung im Verhältnis zur Dicke klein (oder derselben Größenordnung) ist, so daß die entsprechende physikalisch realisierbare Berechnung Gültigkeit hat.

Zur Korrekturmöglichkeit durch Schleifen der Scheiben sei noch bemerkt, daß sie eher theoretischen Charakter hat, denn es stehen dem Experimentalphysiker vorderhand noch keine Mittel zur Verfügung, den Glasscheiben so komplizierte Profile zu erteilen, wie es die Theorie fordert. Eventuell könnte aber eine solche Möglichkeit (abgesehen vom theoretischen Interesse) für die Industrie von einer gewissen Bedeutung sein.

X. Korrektur mit mehreren Flächen

§ 1. Sphärische Linsen

Will man die Linsenfehler nach den gewöhnlichen Methoden der Optik starrer Linsen korrigieren, kann man nach Kap. IX § 3 dynamische Linsen mit sphärischen Flächen konstruieren. Verschiedene solche Linsen können dann nach den bewährten Regeln der Objektivoptik zu korrigierten Sätzen kombiniert werden.

Dieses Vorgehen bedeutet aber für die dynamische Linse einen Umweg. Die Möglichkeit, Cartesianische Flächen anzunähern und die weiter unten dargestellten Arten der Korrektur sind auszunützen, sie entsprechen besser dem Wesen der dynamischen Linse.

§ 2. Meniskus

Die Angaben dieses Paragraphen entnehme ich der schon erwähnten, noch nicht veröffentlichten Arbeit von F. Dessauer.

Kombiniert man zwei elastische Schalen einer dynamischen Linse als Meniskus, so kompensieren sich eine Reihe Fehler und Unregelmäßigkeiten, da die eine Fläche negativ, die andere positiv wirkt. Es verringern sich die Randstörungen durch Über- oder Unterkrümmung der Randzonen ganz oder teilweise, bei gleicher Fassungs- und Dichtungsanordnung. Eine sphärische Abweichung durch die zweite Fläche würde dadurch beseitigt werden, daß eine gleiche durch die erste Fläche sich negativ auswirkt. Bei der hier diskutierten Meniskuslinse ist das Flüssigkeitsvolumen abgeschlossen. Der Druck gelangt von außen auf die konkave Fläche und die Durchbiegung dieser bewirkt über das konstante Volumen der praktisch inkompressiblen Flüssigkeit auch eine Durchbiegung der zweiten Linsenschale. Der regulierbare Druck wirkt auf eine nur mit Luft gefüllte, also optisch nicht wirksame Kammer vor dem Meniskus (Abb. 40).

Die Arbeit befaßt sich vor allem mit der theoretischen Unter-

suchung der Frage : Wie groß ist die Durchbiegung der zweiten Linsenschale, oder mit anderen Worten : Wie ändert sich die gesamte Brechkraft des Meniskus in Funktion des Druckes auf eine Schale, bei Annahme sphärischer Krümmung ?

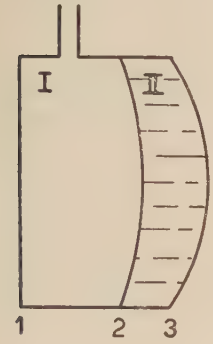

Abb. 40.
Dynamischer Meniskus.

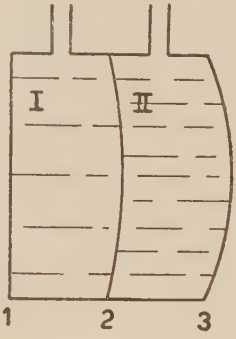

Abb. 41.

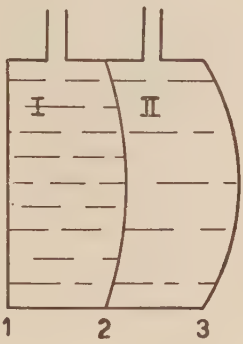

Abb. 42.

Das rechnerische Verfahren ergibt unbequeme Formeln, die aber zu einer eleganten graphischen Darstellung führen, die direktes Ablesen der Brennweite (und der Brennweitenvariation) gestattet.

§ 3. Verschiedene Füllflüssigkeiten

Bei einer Linse mit drei Membranen (Zweikammerlinse) sind alle drei optisch wirksam, wenn man zwei verschiedene Flüssigkeiten in die Kammer einfüllt. Man erhält so die Kombination zweier Linsen verschiedener Brechkraft. Diese Kombination zweier Linsen wurde schon in der Arbeit II [1] diskutiert, hauptsächlich in Hinblick auf die chromatische Aberration. Auf jene Arbeit sei für weitere Einzelheiten hingewiesen.

Für die verschiedenen Möglichkeiten zur Korrektur der Zonenabweichung ergibt sich folgende Zusammenstellung :

1. $n_1 < n_2$:

   a) $p_1 > p_2$, p_1 regulierbar, p_2 konstant. Die Steigerung von p_1 macht die Wölbung der zweiten Schale stärker, d. h. die negative Wir-

[1] II. S. 580.

kung wird größer, die Linse schwächer. Hier läßt sich eine chromatische Korrektur nicht erreichen, da der Teil II mit größerem n und größerer Dispersion vorwiegt (Abb. 41).

b) Wird statt p_2 = konst., v_2 (Volumen) = konst. so ist die schwächende Wirkung geringer, eine Korrektur bleibt aber unmöglich.

2. $n_1 > n_2$. Es ergeben sich folgende Fälle:

a) Die Scheibe 1 ist so dick, daß sie praktisch plan bleibt. Es sind die beiden Fälle der Abb. 42 und 43. Die Linse von Abb. 42 kann nicht als Meniskus wirken, da beide optisch wirksame Flächen positiv sind, sich also nicht korrigieren. Der Fall von Abb. 43 ist eine Kombination einer Bikonvex- und einer Plankonkavlinse und gibt eine Korrekturmöglichkeit.

b) Auch die Scheibe 1 ist optisch wirksam (Abb. 44). Hier wirkt der Teil 1 als Meniskus zur Korrektur.

Diese drei Methoden wurden in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt, denn es liegt nahe, zuerst eine Korrektur der sphärischen Aberration schon mit zwei Flächen zu suchen, um noch möglichst viele Parameter für die Behebung der anderen Linsenfehler frei zu halten.

In die in diesem Paragraphen gestreiften Korrekturmöglichkeiten fällt auch die, mit einer starren Glaslinse eine dynamische Linse zu korrigieren.

§ 4. Verschiedene Dicke der Linsenschalen

Aus den Betrachtungen des § 3 in Kap. VIII folgt vielleicht die aussichtsreichste Möglichkeit einer Korrektur:

Sind die beiden Schalen einer einfachen (Einkammer-) Linse von verschiedener Dicke, so kann man einen Gang mit sphärischen und einen mit antisphärischen Eigenschaften derart kombinieren, daß sich die Fehler aufheben. Anders gesagt:

Die sphärische Aberration der dünneren Schale (bzw. derjenigen mit größerem Radius, siehe Kap. VIII § 5) kompensiert die antisphärische Aberration der dickeren (oder derjenigen mit kleinerem Radius).

Zum Beispiel ergibt sich dies in der Umgebung der Dicke von 0,4 mm bei Silikatglas (mit Kautschukdichtungen). Etwa mit einer Schale von 0,35 mm und einer zweiten von 0,45 mm könnte die Korrektur möglich sein. Aus den Gründen der Kriegshindernisse waren

aber diese Dicken nie mit der gewünschten Genauigkeit vorhanden und man mußte sich mit Annäherungsversuchen mit dem zur Verfügung stehenden Material begnügen.

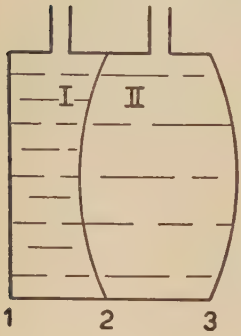

Abb. 43.

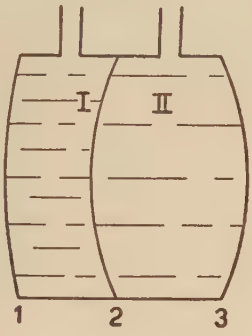

Abb. 44.

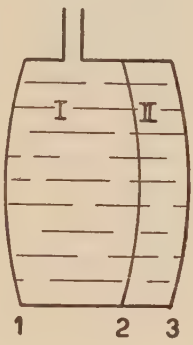

Abb. 45.

Es ergaben sich folgende Schwierigkeiten:

1. Das dünne Glas biegt sich sehr stark durch, oder bricht sogar, bevor sich das dickere überhaupt zu einer optisch wirksamen Fläche ausbiegt.

2. Unter den gegenwärtigen Bedingungen war es lange unmöglich, genügend dünnes Glas (also sich genügend sphärisch verhaltendes) zu erhalten, um eine vollständige Korrektur durchzuführen. Ohne dieses Glas bleibt die Linse antisphärisch, da die sphärische Aberration des ungenügend dünnen Glases zu gering ist, um die antisphärische Aberration der dickeren Scheibe zu kompensieren.

Immerhin zeigten die Versuche, die durchgeführt werden konnten, die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges: die Aberration konnte, wenn nicht beseitigt, so doch verrringert werden. Als dann endlich einige wenige Scheiben dünnen Glases in geringen Mengen aus Königgrätz eintreffen konnten, gelang es, eine ziemlich gut korrigierte Linse zu erhalten.

Bevor wir diese Linse beschreiben, werden wir in den nächsten Paragraphen noch die Umgehung der oben erwähnten Schwierigkeit 1 behandeln.

§ 5. Linse mit Teilung der Füllkammer

Um zu verhindern, daß sich die dünne Schale im Verhältnis der dicken zu stark durchbiegt, kann man eine dritte Glasschale in die Linsenkammer einführen (Abb. 45). Diese dritte Schale bleibt optisch inaktiv, denn sie grenzt nicht Medien mit verschiedenen Brechungsindizes ab. Der Teil der Linse mit der dünneren Außenschale ist abgeschlossen. Auf den anderen Teil (also mit der dickeren äußeren Schale) wird der variable Druck gegeben. Auf die dünnere Scheibe gelangt über das abgeschlossene Flüssigkeitsvolumen nur ein reduzierter Druck, denn ihre elastische Gegenkraft wird durch die Zwischenscheibe erhöht. In Bezug auf die dünne (sphärische) Scheibe ist dann die Durchbiegung der dicken (antisphärischen) Scheibe erhöht, so daß eine Kompensation der Aberration eintritt.

§ 6. Linse mit Gegendruck

Die im vorigen Paragraphen beschriebene Anordnung ist mit unserer Dreikammerlinse bereits realisierbar, aber das Auswechseln der verschiedenen Dicken der Zwischenscheiben zur Ermittlung der richtigen elastischen Gegenkraft ist mit dieser Anordnung umständlich, da jedesmal die ganze Linse zerlegt, gereinigt, wieder zusammengesetzt und frisch gefüllt werden muß. Für Experimentierzwecke erreicht man auf einfachere Weise dasselbe Ziel:

Bei unserer Linse mit zwei Schalen wird auf die dünne Scheibe von außen mittels eines Luftpolsters ein Gegendruck angebracht. Diese Anordnung hat den Vorteil, daß der Gegendruck, also die elastische Gegenwirkung der dünnen Scheibe, leicht veränderlich ist. Es ergibt sich allerdings die für das Laboratorium, nicht aber für die praktischen Anwendungen, belanglose Komplikation, daß prinzipiell zwei Druckeinrichtungen vorhanden sein müssen.

Um trotzdem mit einer einzigen Vorrichtung zur Druckerzeugung auszukommen, war der Gang der Messungen bei Linsen mit Gegendruck folgender:

Als Gegendruckkammer auf der Seite des dünnen Glases diente in der Zweikammerlinse (siehe Kap. II § 2, 3) eine nur mit Luft gefüllte Linsenkammer, die nach außen mit einer 3 mm starken Silikatglasscheibe abgeschlossen war. Die Drucke im Linseninneren und in der Gegendruckkammer wurden solange gesteigert und am Manometer ab-

gelesen, bis man zum gewünschten Ausgangsbetrag der Durchbiegung der dicken Scheibe kam. Dann schloß man die Gegendruckkammer ab und erhöhte den Druck im Linseninnern weiter. Erst jetzt wurde auf diese Art die dünne Scheibe belastet. Dieses Vorgehen hat gegenüber einem Experimentieren mit zwei Druckeinrichtungen und zwei Manometern den Vorteil der leichteren Handhabung und der geringeren

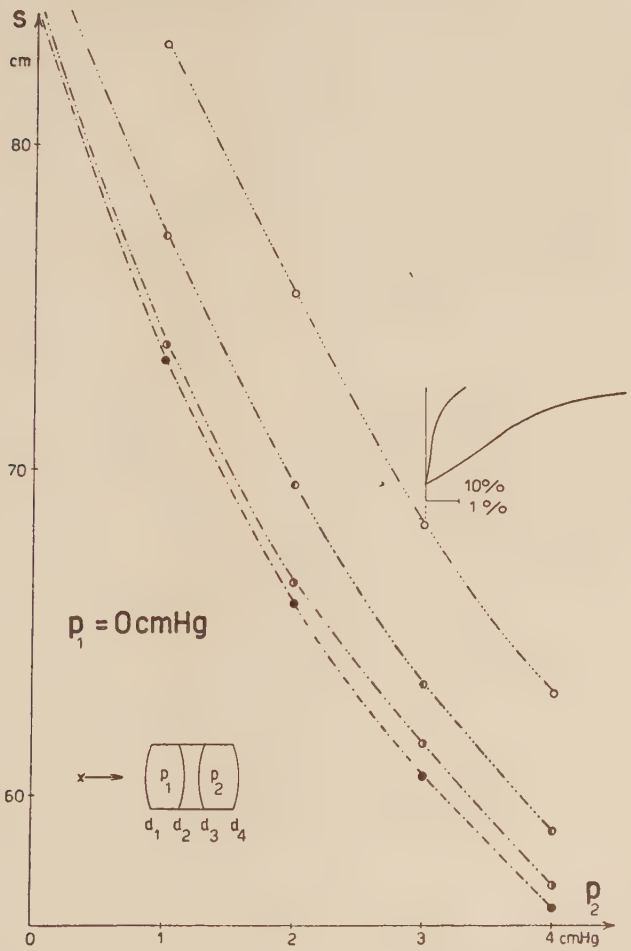

Abb. 46. Überzogenes Silikatglas,
$d_1 = 0{,}2$ mm, $d_2 = 0{,}2$ mm,
$d_3 = 0{,}3$ mm $d_4 = 0{,}29$ mm, $\varnothing_s = 85$ mm.

Gefährdung der dünnen Scheiben, die unter Umständen nur eine Druckdifferenz von 2 cm Hg ohne Bruch aushalten.

Zur Erreichung der Ruhestellung ist natürlich der Vorgang umzukehren: Druckverminderung bis zu jenem Druck, bei dem man die Luftkammer abgeschlossen hatte, Verbinden derselben mit der Druckvorrichtung, Herabgehen auf Druck 0.

Mit der beschriebenen Anordnung wurde eine größere Reihe verschiedener Versuche unternommen. Dabei wurden alle zur Verfügung stehenden Glasdicken von 0,7 bis 0,2 mm in den beiden Durchmessern

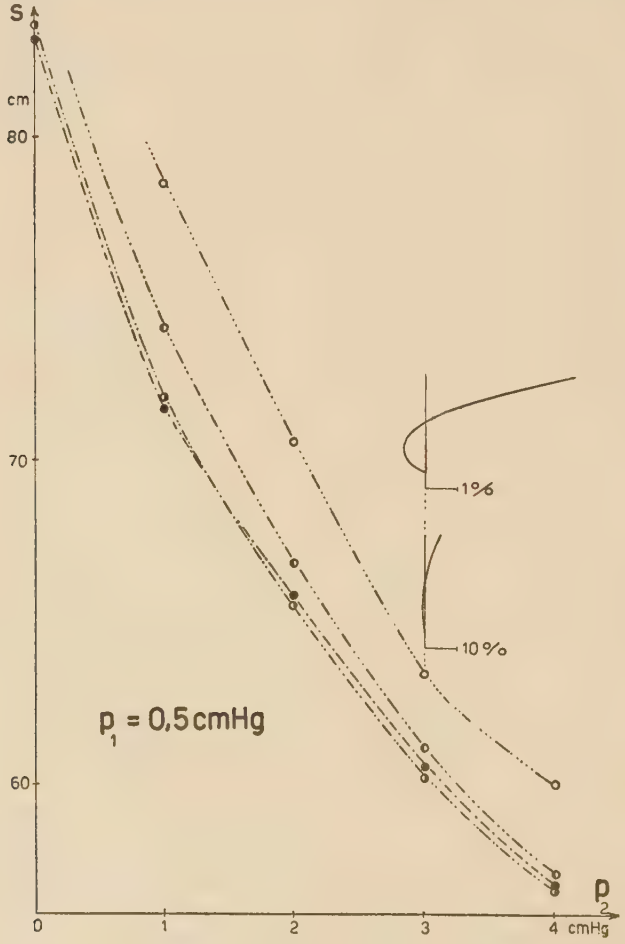

Abb. 47.

von 10 und 8,5 cm (Schwingringe 9,2 und 7,3 cm) kombiniert und mit verschiedenen Gegendrucken gemessen. Im Verlauf dieser Messungen zeichneten sich die verschiedenen Schwierigkeiten aus, die früher beschrieben wurden, wie diejenigen der Dichtungsringe, der Schwingringe, der zu langen Brennweiten usw., usw.

Bei allen Versuchen ist immer zu berücksichtigen, daß alle Gläser erst bei größeren Durchbiegungen den eigenen Aberrations-Charakter zeigen. Man muß sie also für eine Korrektur stärker, eventuell bis zur Höchstgrenze belasten.

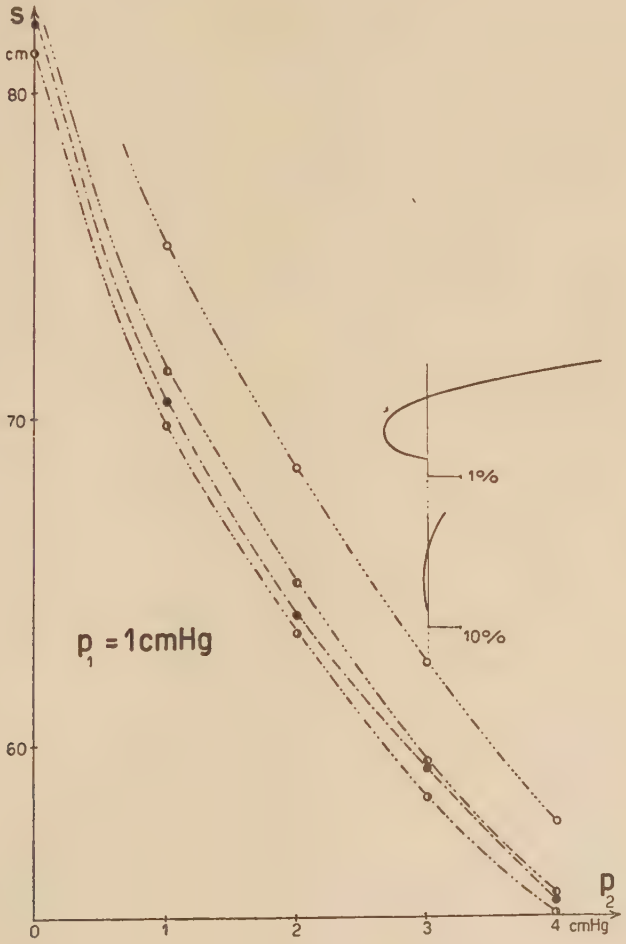

Abb. 48.

Bei der Verwendung der Doppellinse zur Brennweitenverkürzung wurden die beiden Flüssigkeitslinsen so gegen einander gekehrt, daß die dickeren Schalen die äußersten waren und die dünnen gegen den als Luftpolster benützten Zwischenraum zu liegen kamen.

Nach der langen Reihe von Vorversuchen konnte erst ein Resultat erzielt werden, nachdem die wenigen dünnen Scheiben eingetroffen waren. Wie schon oben bemerkt, konnte ohne diese lange Zeit erwarteten Streifen die antisphärische Aberration der dicken Linsenschalen nie genügend kompensiert werden.

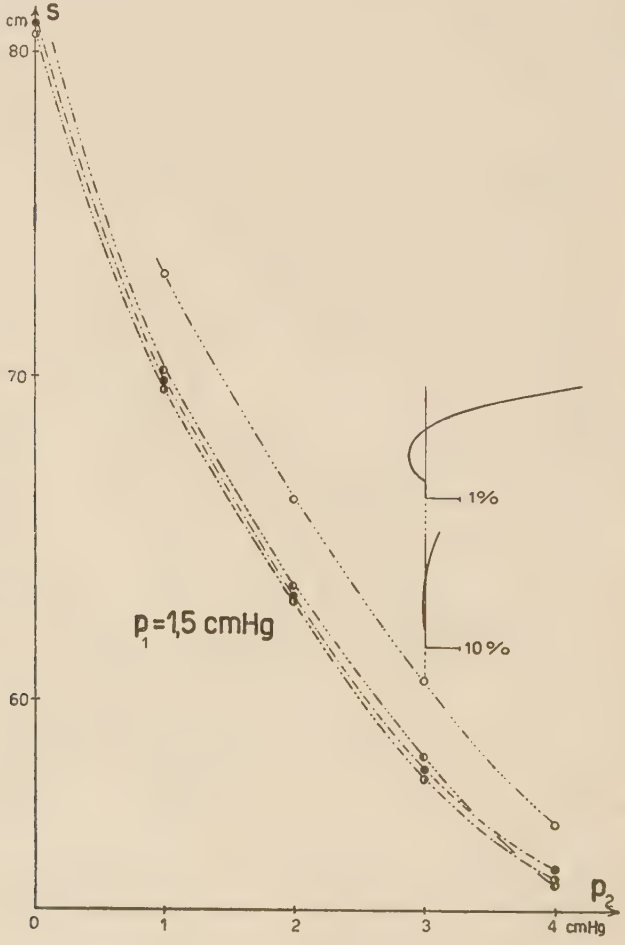

Abb. 49.

§ 7. Doppellinse

Die geringe Anzahl der erhaltenen sehr dünnen Scheiben zwang uns, die Verteilung der Linsenschalen etwas zu ändern, indem in der Doppellinse die eine Linse mit den dünnen Schalen, die andere mit dickeren ausgestattet wurde. Auf diese Weise war es möglich, die Belastung der durch ihre Seltenheit kostbaren, z. Zt. unersetzlichen dünnen Scheiben noch vorsichtiger zu übersehen. Die dickeren Scheiben waren 0,301 und 0,290 mm (die dünnsten der früher vorhandenen) stark. Alle Scheiben wurden ohne Dichtungen auf die Schwingringe geklebt.

In den Kurven dieser Doppellinse bedeutet p_1 den Druck in der Linse mit dünneren Gläsern, p_2 dagegen den Druck in der anderen.

Für die verschiedenen Werte von p_1 lesen wir aus den Kurven:

$p_1 = 0$ cm Hg (Abb. 46): Die Linse ist stark antisphärisch, denn es wirkt nur die Hälfte mit diesem Charakter.

$p_1 = 0{,}5$ cm Hg (Abb. 47): Es läßt sich eine Korrektur bemerken, indem die erste Zone näher an die zweite rückt und diese sogar schneidet.

$p_1 = 1$ cm Hg (Abb. 48): Die Brennweite der zweiten Zone ist schon unterhalb derjenigen der ersten, die Brennweite der dritten Zone bleibt länger als beide anderen. (Die Kurve der ersten Zone liegt zwischen denen der zweiten und der dritten Zone.)

$p_1 = 1{,}5$ cm Hg (Abb. 49): Bei demselben Charakter rücken die Zonenbrennweiten näher zusammen.

$p_1 = 2{,}5$ cm Hg (Abb. 50): Bedeutendes Näherrücken aller Kurven. Bei dieser Linse ist die sphärische Aberration des einen Teils weitgehend durch die entgegengesetzte Aberration des anderen Teils kompensiert.

NB. Die prozentuale Angabe der Aberration mit der Einheitsstrecke für 10 % dient zum Vergleich mit den Linsen der vorhergehenden Abschnitte. Dieser Vergleich zeigt, daß die Aberration beträchtlich herabgedrückt wurde. Die graphische Darstellung mit der Einheit von 1 % dient zum Vergleich der Kurven 46-50 untereinander.

Durch die Anordnung mit der Kammer für den Gegendruck ließe sich dasselbe erreichen, denn prinzipiell leistet jene dasselbe wie die in diesem Paragraphen beschriebene unsymmetrische Doppellinse.

§ 8. Berücksichtigung der Schalenkombination

Beim Überlegen von Korrekturmöglichkeiten kann man auch noch berücksichtigen, daß die Elastizität, also auch die Durchbiegung bei gleichem Druck, verschieden ist bei Silikatglas allein, bei überzogenem Glas oder bei auf Plexiglas aufgeklebtem. Die Form der elastischen Linie ändert sich bei diesen Kombinationen nicht (Kap. V § 7), d. h. daß der sphärische oder antisphärische Charakter erhalten bleibt. Dadurch läßt sich unter Umständen die Kammer für den Gegendruck oder die Zwischenscheibe einsparen.

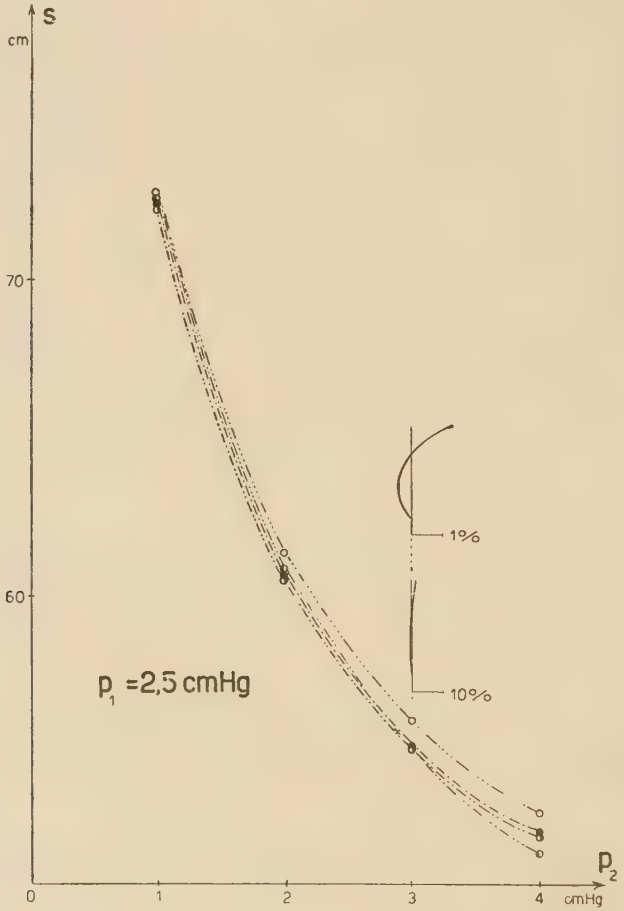

Abb. 50.

ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSS

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den Schalen der dynamischen Linse, ihrer Einspannung und der Korrektur der Zonenabweichung.

Einspannen. Die besten Resultate erzielt man durch Einspannen der Scheiben in sog. Schwingringe, die ein nahezu freies Drehen am Rande ermöglichen. Dabei werden die Scheiben auf diese Ringe geklebt, ein Verfahren, das durch Umgehung von Dichtungen ein Gleiten in der Fassung verringert. Dieses wird noch erschwert durch hohen Einspanndruck. Beides verbessert auch die Reproduzierbarkeit.

Schalen. Diese wurden aus Plexiglas oder Silikatglas hergestellt. Das Silikatglas wurde zur Erhöhung des Elastizitätsbereiches mit einem elastischen Überzug versehen, dessen Einfluß theoretisch und experimentell untersucht wurde: Außer der Elastizität ist die Bruchfestigkeit leicht erhöht.

Aberration. Es gibt Linsen mit sphärischer und solche mit antisphärischer Aberration. Für den Zusammenhang dieses Verhaltens mit der Dicke und dem Radius der Linsenschalen wurde gefunden: Die Abnahme der Dicke (bei konstantem Radius) wirkt in Bezug auf die Aberration in gleichem Sinne wie die Zunahme des Radius (bei konstanter Dicke). In beiden Fällen wird die Aberration mehr sphärisch.

Die Aberration kann behoben werden durch Korrektur der Einzelfläche oder durch Anpassen mehrerer Linsenschalen aufeinander. Die Einzelfläche wird u. a. durch geeignete Formgebung der Scheibe korrigiert. Die dazu notwendige Form wurde theoretisch für die beiden Fälle der kleinen und der großen Durchbiegung ermittelt. Für große Durchbiegungen ergibt sich dabei ein physikalisch unrealisierbares Resultat. Für kleine Durchbiegungen (oder für entsprechend dickes Material) ist dieser Weg möglich.

Die Korrektur durch Kombination zweier Flächen wurde experimentell geprüft und bestätigt. Durch die sphärische Aberration der einen Linsenschale kann die antisphärische der anderen korrigiert werden. Die größte Schwierigkeit der Arbeit bestand in der kriegsbedingten Unmöglichkeit, genügend dünnes Glas zu beschaffen.

Die Vor- und Nachteile von Silikatglas und Plexiglas als Material für die Schalen der dynamischen Linse seien noch kurz gegenübergestellt:

Plexiglas:

a) Möglichkeit großer Durchbiegung, hingegen Fließeigenschaften (Hysteresis).

b) Leichte Bearbeitung, dafür empfindlich gegenüber mechanischer Schädigung und chemischer Wirkung gewisser Füllflüssigkeiten.

c) Je nach Dicke ergeben sich sphärische oder antisphärische Linsen. (Korrekturmöglichkeit!)

d) Selbst große Dicken können für die Linsen genügend durchgebogen werden. In diesem Fall kann die theoretisch behandelte Korrekturmöglichkeit der Einzelfläche durchgeführt werden.

Silikatglas:

a) Elastisch (keine Hysteresis), dafür geringe Bruchfestigkeit.

b) Kratzfest, beständig gegenüber den Füllflüssigkeiten, dafür schwer zu verarbeiten, brüchig.

c) Schwerlich genügend dünn erhaltbar, um auch sphärische Linsen (und damit Korrektur) zu erhalten. Zeitbedingt.

d) Genügende Durchbiegung erhält man nur bei sehr kleiner Dicke, also ist dann die Korrekturmöglichkeit der Einzelfläche durch Formgebung nicht realisierbar, denn die Voraussetzungen für den Fall verwertbarer Resultate sind nicht erfüllt.

Nach den in neuester Zeit aus Amerika eingetroffenen Mitteilungen ist es der Corning Glass Company (New York) gelungen, hochelastisches und bruchfestes Glas herzustellen. Dieses Material wird es voraussichtlich ermöglichen, die größten jetzt noch der dynamischen Linse im Wege stehenden Schwierigkeiten zu überwinden.

Physikalisches Institut
der Universität Freiburg, Schweiz.

5. Juli 1946.

LEBENSLAUF

Am 21. Februar 1918 wurde ich in Zürich geboren. Mein Vater, Adolf Briner, von und in Zürich, ist Kaufmann ; meine Mutter, Maria geb. Bernasconi, war Tessinerin. Die Primarschule besuchte ich in Zürich, sodann die Kantonsschule in Lugano, wo ich die Maturitätsprüfung Typus C ablegte. Im Wintersemester 37/38 schrieb ich mich an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössisch Technischen Hochschule ein. Dort besuchte ich bis 1942 Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren FAVRE, FISCHER, GONSETH, HOPF, HUBER, KOLLROS, METTLER, PAULI, POLYA, RÜST, SÄNGER, SCHERRER, STIEFEL, TANK, TREADWELL, VÖLLM, WENTZEL.

Während der Studiensemester erteilte ich öfters Aushilfsunterricht an der Höheren Töchterschule und an der Oberrealschule Zürich, sowie am Lehrerseminar in Küsnacht.

Nach Absolvierung des Normalstudienplanes an der E. T. H. kam ich im Januar 1943 an die Universität Freiburg, um bei Herrn Professor F. Dessauer eine Doktorarbeit in Experimentalphysik zu beginnen. In Freiburg besuchte ich Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren BAYS, BRASEY, DESSAUER, PFLUGER. Allen Herren Professoren in Zürich und in Freiburg spreche ich den verbindlichsten Dank aus.

Im November 1944 wurde ich zum Assistenten am Physikinstitut ernannt ; im Juli 1945 legte ich die letzte Prüfung zum mathematischen Lizenziat ab.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dessauer, spreche ich meinen besten Dank aus für das große und fördernde Interesse, welches er der vorliegenden Arbeit stets entgegenbrachte, für die zahlreichen fruchtbaren Besprechungen, sowie für die freundliche Überlassung der zur Durchführung notwendigen Mittel des Institutes. Herrn Professor BRASEY danke ich verbindlichst für die Durchsicht des theoretischen Teils. Auch Fräulein Dr. A. LOEBENSTEIN sei an dieser Stelle gedankt für die Ausmessung und die Zubereitung der Gläser. Herrn ing. dipl. S. H. METZGER danke ich für die Projektierung der Linsenfassungen.